ИП

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

ЕГЭ 2011

Математика

Контрольные тренировочные материалы с ответами и комментариями

Экзамен с «Просвещением»

СЕРИЯ «ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ: ЕГЭ»

КОМПЛЕКТЫ ВЫПУСКАЮТСЯ: *по русскому языку, математике, истории, обществознанию, биологии, географии, химии, физике, информатике, литературе и иностранным языкам. Они могут быть использованы учащимися как для самостоятельной подготовки к ЕГЭ, так и для работы в классе, а также преподавателями средней школы и структур довузовской подготовки при организации изучения курса предмета, при его повторении и обобщении.*

КОМПЛЕКТ СОСТОИТ ИЗ ПОСОБИЙ:

1. «ЕГЭ. Учебно-справочные материалы»

- Содержат краткий теоретический курс среднего (полного) общеобразовательного уровня, представленный на основе кодификатора, разработанного Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ).
- Сопровождаются примерами типовых заданий в различных тестовых формах и различного уровня сложности с учётом специфики основных существующих учебных (рабочих) программ по предмету.
- Отличаются чётко структурированным и компактным изложением материала с использованием визуального ряда в виде таблиц, схем, наглядных изображений.
- Предназначены для отработки основных знаний и умений выпускников, необходимых для успешной сдачи ЕГЭ.
- Помогут систематизировать знания по предметам, сконцентрировать внимание на наиболее важных вопросах курсов, выносимых на экзамен, а также правильно выстроить стратегию и тактику подготовки к ЕГЭ.

2. «ЕГЭ. Контрольные тренировочные материалы с ответами и комментариями»

3. «ЕГЭ. Индивидуальный комплект тренировочных материалов»

- Представляет собой полный аналог настоящего индивидуального комплекта материалов ЕГЭ.
- В состав комплекта входят: бланк регистрации; бланки ответов № 1 и № 2; вариант заданий, составленный в соответствии с демонстрационным вариантом КИМов и спецификацией, разработанными ФИПИ.
- В отличие от материалов, получаемых экзаменуемым на ЕГЭ, комплект содержит ответы, выполненные в виде заполненных бланков.
- Выпускается в нескольких вариантах.

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ: ЕГЭ

Математика

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

2011

Контрольные тренировочные материалы с ответами и комментариями

Москва
Санкт-Петербург
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2011

УДК 51 (035)
ББК 22.1я2
М 34

Проект «Итоговый контроль»
Серия «Итоговый контроль: ЕГЭ» основана в 2010 году

Руководитель проекта *М. А. ПОЛЯКОВ*
Научный руководитель проекта *к.п.н. Г. С. КОВАЛЁВА*

Авторы: *Ю. М. НЕЙМАН, Т. М. КОРОЛЁВА, Е. Г. МАРКАРЯН*

Математика: ЕГЭ 2011: Контрольные тренировочные мате-
М 34 риалы с ответами и комментариями (Серия «Итоговый контроль: ЕГЭ») / Ю. М. Нейман, Т. М. Королёва, Е. Г. Маркарян. — М.; СПб.: Просвещение, 2011. — 96 с.: ил.
ISBN 978-5-09-025293-5.

Пособие предназначено для оценки учащимися степени готовности к ЕГЭ по математике, а также для выявления пробелов в своих знаниях. Оно поможет познакомиться с требованиями, которые предъявляются на ЕГЭ к выполнению заданий разного типа.

Содержит варианты заданий, составленных на основе спецификации и демонстрационной версии КИМов ЕГЭ, разработанных Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ).

Данное пособие может использоваться как для самостоятельной подготовки к ЕГЭ, так и для работы в классе.

УДК 51 (035)
ББК 22.1я2

ISBN 978-5-09-025293-5

Введение

В данный сборник включены 10 вариантов контрольных измерительных материалов по математике, составленных на основе демонстрационного варианта и спецификации КИМов для проведения ЕГЭ 2011 года. Демонстрационный вариант разработан Федеральным институтом педагогических измерений по заданию Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации.

Предложенные в пособии варианты экзаменационных работ позволят вам не только потренироваться в выполнении тех видов заданий, которые традиционно включаются в ЕГЭ по математике, но и оценить свои знания в преддверии ЕГЭ. Поэтому пособие и называется «Контрольные тренировочные материалы».

Все варианты заданий в представленном сборнике по типу, структуре и уровню сложности максимально приближены к будущим экзаменационным заданиям 2011 года. Каждый вариант состоит из двух частей.

Часть 1 содержит 12 заданий (B1 – B12) базового уровня. Ответом на задания B1 – B12 служит конечная десятичная дробь или целое число.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1 – C6). При их выполнении требуется представить подробное решение и сформулировать окончательный ответ.

Все задачи в данном сборнике снабжены ответами, решениями или указаниями к их решению со ссылкой на учебное пособие «Математика. ЕГЭ. Учебно-справочные материалы».

Использование при подготовке к ЕГЭ пособия «Контрольные тренировочные материалы» в комплекте с пособием «Учебно-справочные материалы» позволит вам более эффективно подготовиться к ЕГЭ.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и записать ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Вариант 1

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Расстояние на карте между двумя населёнными пунктами равно 20 см. Велосипедист, едущий со скоростью 12 км/ч, проезжает это расстояние за 1 ч 40 мин. Найдите масштаб карты.

B2 Функция $y = f(x)$ задана графиком (см. рис. B2—1). Найдите число корней уравнения $f(x+1)+2=0$.

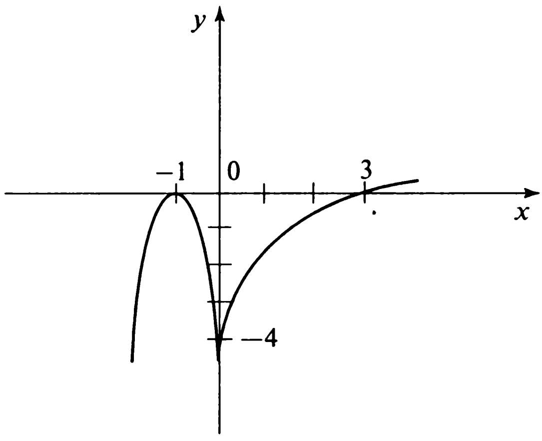

Рис. B2—1.

B3 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{x+5}{3x+4}} = \dfrac{3}{4}$.

B4 Периметры подобных треугольников относятся как 2:3, сумма их площадей равна 260. Найдите площадь большего треугольника.

B5 Для ремонта квартиры дважды покупали белую и коричневую краску. Первый раз купили не более 5 банок, а во второй раз не менее 6, при этом первый раз купили коричневой краски вдвое больше, чем во второй раз, а белой краски во второй раз вдвое больше, чем в первый. Сколько банок белой краски куплено в первый раз?

B6 Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках $A(-5;-2)$, $B(-1;1)$, $C(3;-2)$, $D(-1;-4)$.

B7 Найдите значение выражения $\log_{25}\log_5\sqrt[5]{5}$.

B8 Найдите сумму абсцисс всех точек на графике функции $y=\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2$, в которых касательная параллельна оси $0X$.

B9 Образующая конуса, объём которого равен 64π куб.ед., наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите длину образующей.

B10 Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, если её производная имеет вид $f'(x)=(x+3)^2(x^2-9)(x^2-8)$.

B11 Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\log_5(x^2-8)-\log_{x+4}^{-1}5=0$.

B12 В кинозале нужно разместить некоторое число зрителей на расставленые скамейки. Если на каждую из них посадить по 4 зрителя, то не хватит 5 скамеек при том же порядке размещения. А если на каждую посадить по 5 зрителей, то 5 скамеек останутся свободными. Сколько зрителей пришло в кинозал?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $x^2-2x\sin(x+a)+1=0$ в зависимости от значений параметра a.

C2 Куб вписан в конус. Найдите длину ребра куба, если образующая конуса равна 5 и наклонена к плоскости основания под углом α, косинус которого равен $\frac{4}{5}$.

C3 Решите неравенство $3^{2x+1}+3^{2\sqrt{x}+2}\leqslant 28\cdot 3^{x+\sqrt{x}}$.

C4 В треугольнике ABC со сторонами $AB=12$, $BC=18$, $AC=15$ из вершины A проведены биссектриса и высота. Найдите косинус угла между ними.

C5 Решите систему уравнений $\begin{cases}3^x-3\cdot 2^y+3\arccos z=2a-7,\\ 2\cdot 3^x+2^y+2\arccos z=10,\\ 3\cdot 3^x+2\cdot 2^y+\arccos z=15-2a\end{cases}$

в зависимости от значений параметра a.

C6 Для изготовления изделий двух видов имеется 100 кг металла. На изготовление одного изделия 1-го вида расходуется 2 кг металла, а изделия 2-го вида — 4 кг. Какую наибольшую прибыль (в рублях) может получить предприятие от продажи изделий, если отпускная стоимость изделия 1-го вида составляет 300 руб., а 2-го — 200 руб., причём изделий 1-го вида нужно изготовить не более 40, а 2-го — не более 20?

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: $\frac{1}{10^5}$.

Решение. Масштаб карты — отношение расстояния между двумя точками на карте к расстоянию на местности. Велосипедист за 1 ч 40 мин проехал 20 км. Следовательно, масштаб равен отношению $\frac{20\text{ см}}{20\text{ км}}=\frac{20\text{ см}}{2\,000\,000\text{ см}}=\frac{1}{10^5}$.

B2 Ответ: 3.

Указание. Уравнение решается построением графиков $y=-2$ и $y=f(x+1)$. Последний получается из заданного смещением его влево на единицу (см. раздел 5.5.2 справочника).

B3 Ответ: 4. **Указание.** Возведите в квадрат.

B4 Ответ: 180.

Решение. Обозначим сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно a и a_1, а их площади S и S_1. Так как отношение периметров подобных треугольников равно отношению сходственных сторон, то $\frac{a}{a_1}=\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{4}{9}$. По свойству пропорций $\frac{S+S_1}{S_1}=\frac{13}{9}$, $\frac{260}{S_1}=\frac{13}{9}$, $S_1=\frac{260\ 9}{13}=180$.

B5 Ответ: 3.

Решение. Пусть в первый раз купили l банок белой краски и k банок коричневой. Тогда из условия задачи следует: $\begin{cases} l+k\leqslant 5, \\ 2l+\frac{k}{2}\geqslant 6, \end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 2l+2k\leqslant 10, \\ 2l+\frac{k}{2}\geqslant 6, \end{cases}\Rightarrow k\leqslant\frac{8}{3}$. Это означает, что $k=1$ или $k=2$. Но по условию задачи $k\neq 1$, следовательно, $k=2$. Подставляя это значение в систему неравенств, получим $l\leqslant 3$ и $2l\geqslant 5\Rightarrow l=3$.

B6 Ответ: 20. **Указание.** См. пример 9.2.6.

B7 Ответ: $-0{,}5$. **Указание.** Используйте свойства логарифмов.

B8 Ответ: -3. **Указание.** Найдите y' и решите уравнение $y'=0$.

B9 Ответ: 8.

Решение. На рис. B9–1 изображено осевое сечение конуса.

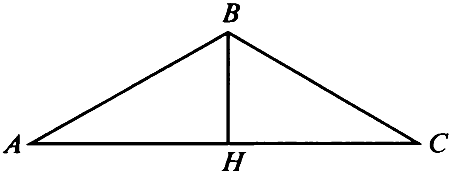

Рис. B9– 1.

Обозначим $AB = a$. Тогда $64\pi = \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot BH$. Из ΔABH: $AH = a\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $BH = a\sin 30^\circ = \frac{a}{2}$. Подставляя эти значения в формулу объёма конуса, получим $64\pi = \frac{1}{3}\pi\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}$, $a = 8$.

B10 Ответ: 4. **Указание.** См. пример 8.2.8.

B11 Ответ: 4. **Указание.** См. пример 7.3.3.

B12 Ответ: 200.

Решение. Пусть x — число зрителей, y — число скамеек. Из условия задачи следует, что $\begin{cases} x - 4y = 4\cdot 5, \\ 5y - x = 5\cdot 5, \end{cases}$ $\begin{cases} x - 4y = 20, \\ -x + 5y = 25, \end{cases}$ $y = 45$ и $x = 200$.

C1 Ответ: $x = 1$, если $a = \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k, k \in Z$; $x = -1$, если $a = 1 - \frac{\pi}{2} = 2\pi n,\ n \in Z$.

Решение. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то уравнение можно представить в виде $\sin(x + a) = \frac{x^2 + 1}{2x}$. Если $x > 0$, то $\frac{x^2 + 1}{2x} \geqslant 1$. Действительно, так как $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, то $\frac{x^2 - 2x + 1}{2x} \geqslant 0$, $\frac{x^2 + 1}{2x} \geqslant 1$.

Так как $|\sin(x + a)| \leqslant 1$, то $\sin(x + a) = \frac{x^2 + 1}{2x}$ выполняется только в случае $\frac{x^2 + 1}{2x} = 1$, т.е. $x = 1$. Тогда $\sin(1 + a) = 1$, $1 + a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $a = \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi k,\ k \in Z$.

Если $x < 0$, то $\frac{x^2 + 1}{2x} \leqslant -1$ и равенство $\sin(x + a) = \frac{x^2 + 1}{2x}$ выполняется только в случае $x = -1$.

Тогда $\sin(a - 1) = -1$, $a - 1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $a = 1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

C2 Ответ: $\frac{12(8-3\sqrt{2})}{23}$.

Решение. Проведём осевое сечение S_1SS_2 конуса (см. рис. С2–1), проходящее через диагонали A_1C_1 и AC верхнего и нижнего оснований куба.

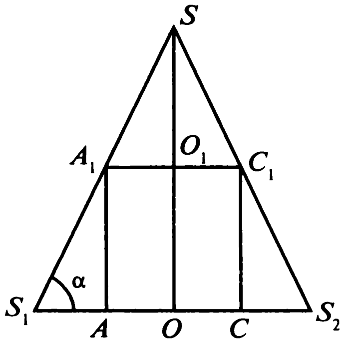

Рис. С2–1.

S_1SS_2 — равнобедренный треугольник, у которого $S_1S=5$ и $\angle SS_1S_2=\alpha$. Обозначим $S_1A_1=x$. Тогда $A_1S=5-x$. Из ΔS_1A_1A: $AA_1=x\sin\alpha$. Из $\Delta A_1SO_1: A_1O_1=(5-x)\cos\alpha$.

Так как A_1O_1 — половина диагонали квадрата основания, то сторона квадрата равна $\sqrt{2}(5-x)\cos\alpha=A_1A$ (все рёбра куба равны). Следовательно, $\sqrt{2}(5-x)\cos\alpha=x\sin\alpha$, $x=\frac{\sqrt{2}\cdot 5}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}$,
$AA_1=\frac{\sqrt{2}\cdot 5\sin\alpha}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{5\sqrt{2}\cdot 0{,}6}{\sqrt{2}+3/4}=\frac{12(8-3\sqrt{2})}{23}$.

C3 Ответ: $x\in[0;4]$.

Решение. Разделив обе части неравенства на $3^{x+\sqrt{x}}$, получим $3^{x-\sqrt{x}+1}+3^{\sqrt{x}-x+2}\leqslant 28$. Обозначим $3^{x-\sqrt{x}}=t>0$ и запишем неравенство через переменную t: $3t+\frac{9}{t}\leqslant 28 \Leftrightarrow \frac{3t^2-28t+9}{t}\leqslant 0$.

Так как $t>0$, то $3t^2-28t+9\leqslant 0$, $\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant 9$. Возвращаясь к переменной x, получим $3^{-1}\leqslant 3^{x-\sqrt{x}}\leqslant 3^2$, $\begin{cases} x-\sqrt{x}\leqslant 2, \\ x-\sqrt{x}\geqslant -1, \end{cases}$ $0\leqslant x\leqslant 4$.

C4 Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Решение. AK – биссектриса угла A, AH – высота (см. рис. С4–1).

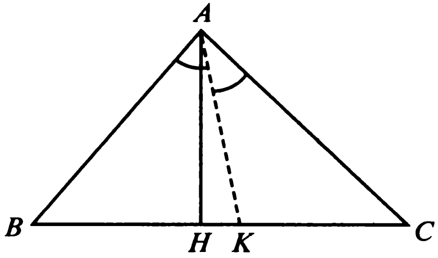

Рис. С4–1.

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{BK}{KC}=\frac{AB}{AC}$, $\frac{BK}{18-BK}=\frac{12}{15}$, $BK=8$.

По теореме косинусов $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B$, $\cos\angle B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2BC\cdot AB}$, $\frac{144+324-225}{2\cdot18\cdot12}=\frac{9}{16}$.

По теореме косинусов из ΔABK: $AK^2=AB^2+BK^2-$ $-2AB\cdot BK\cdot\cos\angle B$, $AK^2=144+64-2\cdot12\cdot8\cdot\frac{9}{16}=100.$

Чтобы найти высоту AH, по формуле Герона найдём площадь треугольника ΔABC: $S_{ABC}=\sqrt{\frac{45}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{15}{2}}=\frac{135}{4}\sqrt{7}.$

Тогда $AH=\frac{2S_{ABC}}{BC}=\frac{135\sqrt{7}}{2\cdot18}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$; $\cos\angle HAK=\frac{AH}{AK}=\frac{15\sqrt{7}}{4\cdot10}=$ $=\frac{3\sqrt{7}}{8}.$

C5 Ответ: Если $-1\leqslant a<2$, то $x=\log_3(2-a)$, $y=2$, $z=\cos(a+1)$; если $a\in(-\infty;-1)\cup[2;\infty)$, то система не имеет решений.

Решение. Введём новые переменные $X=3^x>0$, $Y=2^y>0$ и $Z=\arccos z$, где $0\leqslant Z\leqslant\pi$, и перепишем исходную систему через новые переменные: $\begin{cases}X-3Y+3Z=2a-7,\\2X+Y+2Z=10,\\3X+2Y+Z=15-2a.\end{cases}$

Полученная система является линейной системой относительно X, Y, Z и решается методом исключения неизвестных. Сложив все уравнения системы, получим $6X+6Z=18$, $X+Z=3$. Подставив $X+Z=3$ во второе уравнение, получим $6+Y=10$, $Y=4$. Подставив $Y=4$ и $Z=3-X$ в первое уравнение, получим $X=2-a$. Тогда $Z=a+1$. Возвращаясь к старым переменным x, y, z, получим $\begin{cases} 3^x=2-a, \\ 2^y=4, \\ \arccos z=a+1, \\ 2-a>0, \\ 0\leqslant a+1\leqslant\pi \end{cases}$ $x=\log_3(2-a)$, $y=2$, $z=\cos(a+1)$

при $-1\leqslant a<2$.

C6 Ответ: 13 000.

Решение. Обозначим x_1 — число изделий 1-го вида, x_2 — число изделий 2-го вида, необходимых для получения максимальной прибыли. Тогда эта прибыль выразится числом $P=300x_1+200x_2$. Из условия задачи следует, что $x_1\leqslant 40$, $x_2\leqslant 20$ и $2x_1+4x_2=100$. Для решения задачи введём новые переменные x_3 и x_4, где x_3 — число изделий 1-го вида из возможных 40, которые не нужно изготавливать для получения максимальной прибыли, а x_4 — аналогичное число изделий 2-го вида из возможных 20.

Тогда получим систему условий:

$$\begin{cases} x_1+x_3=40, \\ x_2+x_4=20, \\ 2x_1+4x_2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=10+2x_4, \\ x_2=20-x_4, \\ x_3=30-2x_4. \end{cases}$$

Так как x_1,x_2,x_3,x_4 – неотрицательные целые числа, то из последней системы уравнений следует, что $0\leqslant x_4\leqslant 15$ и переменная x_1, зависящая от x_4, — возрастающая, а переменная x_2, зависящая от x_4, — убывающая. Значит, наибольшее значение выражение $300x_1+200x_2$ достигнет при наибольшем x_1 и наименьшем x_2. Это будет осуществляться при $x_4=15$, т.е. $x_1=40$, $x_2=5$.

Тогда Р = 12 000 + 1000 = 13 000.

Вариант 2

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Для обивки стульев нужно 24,5 м ткани шириной 1,5 м. Сколько метров ткани шириной 1,25 м потребуется для обивки такого же количества стульев?

B2 Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $\begin{cases} 3-x^2, \text{ если } x<2, \\ x-3, \text{ если } x \geqslant 2 \end{cases}$ на промежутке $[-1;4]$.

B3 Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{x^2+8x-5}=2$.

B4 В прямоугольном треугольнике, катеты которого равны 8 и 6, из вершины прямого угла на гипотенузу опущена высота. Найдите разность между площадями большего и меньшего треугольников, на которые высота делит заданный треугольник.

B5 На первом складе находится мука и сахар, причём муки в 4 раза больше, а сахара в 2 раза больше, чем на втором складе, и их общий вес не превышает 110 т. На третьем складе муки в 3 раза больше, а сахара в 7 раз больше, чем на втором складе, и их общий вес не меньше 165 т. Сколько тонн сахара было на втором складе, если вес сахара на этом складе составлял 0,75 веса муки?

B6 На клетчатой бумаге изображён шестиугольник $ABCDFE$ (см. рис. B6—2). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах, считая, что площадь каждой клетки равна 1 см^2.

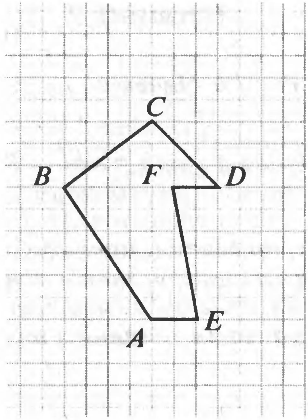

Рис. В6–2.

B7 Найдите значение выражения $\log_{36}(\log_2 25 \cdot \log_5 8)$.

B8 Найдите количество точек на графике функции $y = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, в которых угол наклона касательной к оси $0X$ равен 135°.

B9 В правильной четырёхугольной пирамиде с высотой, равной 11, на расстоянии 4 от вершины проведено сечение, параллельное основанию. Найдите длину стороны основания, если площадь сечения равна 64.

B10 Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, если на области определения функции производная имеет вид $f'(x) = \dfrac{(x+2)^2(x^2-1)}{x^2-x-6}$.

B11 Вычислите значение $\dfrac{x_0-1}{x_0+1}$, если $f(x) = \log_2(3x-4) + \log_2 x$ и $f(x_0) = 5$.

B12 Моторная лодка затрачивает 3,2 часа, чтобы пройти 18 км по течению реки и возвратиться назад. За 1 ч 40 мин она проходит 5 км по течению реки и 12 км против течения. Определите скорость лодки (в км/ч) в стоячей воде.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Найдите сумму целых значений параметра a, при которых число $x=\pi$ не является корнем уравнения $(x-\pi)(x-3\pi)\sqrt{a^2+5a+5+\sin\frac{3}{2}x}=0$, а число $x=3\pi$ является его корнем.

C2 Основанием пирамиды является прямоугольник с углом 30° между диагоналями, а боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите объём пирамиды, если радиус описанной сферы равен 9, а $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

C3 Решите неравенство

$$(\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}})^x+(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}})^x\leqslant 16.$$

C4 Известно, что в трапецию с боковыми сторонами, равными 6 и 10, можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 5:11. Найдите разность длин большего и меньшего оснований трапеции.

C5 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x+2\arcsin y+\arccos z=6a+3, \\ 2\cdot 2^x-3\arcsin y+3\arccos z=16-a, \\ 3\cdot 2^x+\arcsin y+2\arccos z=7a+11 \end{cases}$$

в зависимости от значений параметра a.

C6 Найдите четырёхзначное число, у которого две первые цифры совпадают, две последние цифры совпадают, и оно является точным квадратом.

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: 29,4.

Решение. Для обивки стульев требуется $24{,}5 \cdot 1{,}5 = 36{,}75$ м^2 ткани; при ширине 1,25 её потребуется $\frac{36{,}75}{1{,}25} = 29{,}4$ м.

B2 Ответ: 2. **Указание.** Постройте график заданной функции.

B3 Ответ: –8. **Указание.** Возвести в квадрат.

B4 Ответ: 6,72.

Решение. На рис. B4–2 ΔABC — прямоугольный, $AB = 8$, $AC = 6$ и $AH \perp BC$.

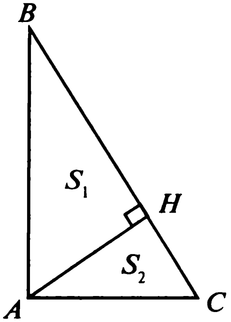

Рис. B4–2.

Очевидно, $\Delta ABH \sim \Delta ACH$, и потому $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}$. По свойству пропорций имеем: $\frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{25}{9}$ и $\frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{7}{9}$, откуда $\frac{S_1 + S_2}{S_1 - S_2} = \frac{25}{7}$, $S_1 - S_2 = \frac{7}{25}(S_1 + S_2) = \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{7}{25} \cdot 24 = 6{,}72.$

B5 Ответ: 15.

Решение. Пусть m — число тонн муки и s — число тонн сахара на втором складе. По условию задачи $\begin{cases} 4m + 2s \leqslant 110, \\ 3m + 7s \geqslant 165 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + s \leqslant 55, \\ 3m + 7s \geqslant 165 \end{cases}$ $m \leqslant 20$. Учитывая равенство $s = 0{,}75m$, получим $s \leqslant 15$.

Из второго неравенства исходной системы получим $3m + 7s \leqslant 60 + 105 = 165$, а по условию эта сумма не меньше 165. Следовательно, $3m + 7s = 165$, $m = \frac{165 - 7s}{3} \leqslant 20$, $s \geqslant 15$. Следовательно, $s = 15$.

B6 Ответ: 31,5. **Указание.** Соедините точки B и F (рис. В6–2) и найдите площадь треугольника BCD *и* площадь трапеции $ABFE$ так же, как в примере 9.2.6.

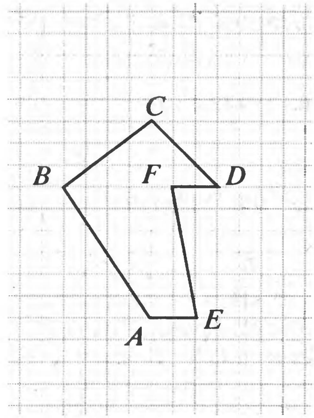

Рис. В6–2.

B7 Ответ: 0,5.

Решение. Преобразуем выражение $\log_2 25 \cdot \log_5 8 =$ $= \log_2 5^2 \cdot \log_5 2^3 = 6\log_2 5 \cdot \log_5 2 = 6$, так как $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ при всех допустимых значениях a и b. Тогда $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.

B8 Ответ: 2. **Указание.** Найдите y' и решите уравнение $y' = \operatorname{tg} 135°$.

B9 Ответ: 22.

Решение. Основанием правильной четырёхугольной пирамиды является квадрат со стороной a, и площадь основания пирамиды равна a^2. Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины. Следовательно, $\frac{64}{a^2} = \frac{16}{121}$, $a = 22$.

B10 Ответ: 2. **Указание.** См. пример 8.2.8.

Решение. Перепишем $f'(x)$ в виде $f'(x) = \frac{(x+2)^2(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-3)}$ и исследуем производную в области определения: $x \neq -2$ и $x \neq 3$. Очевидно, что $f'(x)$ обращается в нуль в точках $x = 1$ и $x = -1$ и при переходе через эти точки меняет знак. Следовательно, каждая из них является точкой экстремума.

B11 Ответ: 0,6.

Решение. Из решения уравнения $\log_2(3x-4)+\log_2 x=5$ найдём то значение x, при котором $f(x)=5$. На области определения функции $f(x)$: $x>\frac{4}{3}$ уравнение записывается в виде $3x^2-4x-32=0 \Rightarrow x_1=4, x_2=-\frac{8}{3}$ не удовлетворяет области определения $f(x)$. Следовательно, $x_0=4$ и $\frac{x_0-1}{x_0+1}=\frac{3}{5}$.

B12 Ответ: 12.

Решение. Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде, y км/ч — скорость течения реки. Тогда $(x+y)$ км/ч — скорость лодки по течению реки, а $(x-y)$ км/ч — скорость лодки против течения. Из условия задачи следует $\begin{cases}\frac{18}{x+y}+\frac{18}{x-y}=3{,}2,\\ \frac{5}{x+y}+\frac{12}{x-y}=\frac{5}{3}.\end{cases}$ Введём новые переменные $u=\frac{1}{x+y}$, $v=\frac{1}{x-y}$ и перепишем систему уравнений через новые переменные: $\begin{cases}18u+18v=3{,}2,\\ 5u+12v=\frac{5}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}45u+45v=8,\\ 15u+36v=5,\end{cases}$ $u=\frac{1}{15}$, $v=\frac{1}{9}$. Возвращаясь к переменным x и y, получим $\begin{cases}x+y=15,\\ x-y=9,\end{cases}$ $x=12$ км/ч, $y=3$ км/ч.

C1 Ответ: –5.

Решение. Если при $x=\pi$ подкоренное выражение исходного уравнения отрицательно, то $x=\pi$ не является его корнем. Если при $x=3\pi$ это выражение неотрицательно, то $x=3\pi$ является его корнем. Таким образом, искомые значения a являются решениями системы неравенств $\begin{cases}a^2+5a+5+\sin\frac{3}{2}\pi<0,\\ a^2+5a+5+\sin\frac{9}{2}\pi\geqslant 0,\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+5a+4<0,\\ a^2+5a+6\geqslant 0,\end{cases}$ $\begin{cases}-4<a<-1,\\ \left[\begin{array}{l}a\geqslant -2,\\ a\leqslant -3,\end{array}\right.\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}-4<a\leqslant -3,\\ -2\leqslant a<-1\end{array}\right.$ и сумма целых значений a равна –5.

C2 Ответ: $\frac{512}{3}$.

Решение. Сделаем диагональное сечение пирамиды, вписанной в сферу. В сечении получим равнобедренный треугольник ASC, вписанный в окружность радиуса 9, с углом при основании α (см. рис. C2–2).

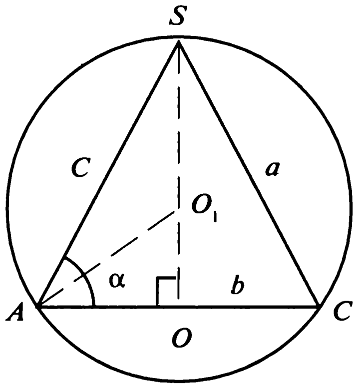

Рис. C2–2.

Основанием ΔASC является диагональ AC основания пирамиды. По известным формулам $S_{\Delta ASC} = \frac{bac}{4R}$; $S_{\Delta ACS} = \frac{1}{2}cb\sin\alpha$, $\frac{bac}{36} = \frac{1}{2}cb\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $c = a = 12\sqrt{2}$, где $AS = c$; $SC = a$ и $AC = b$.

Из ΔASO: $AO = c\cos\alpha = \frac{12\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$, $AC = 8\sqrt{2}$; $SO = c\sin\alpha = 16$. $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot SO$. Так как $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}(AC)^2\sin 30^\circ = (8\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{4} = 32$, то $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 16 = \frac{512}{3}$.

C3 Ответ: $x \leqslant 2$.

Решение. Так как $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$ и $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$, то данное неравенство можно записать в виде $(2\sqrt{3})^x + 2^x \leqslant 16$. Разделим обе части неравенства на 2^x и исследуем полученное неравенство $(\sqrt{3})^x + 1 \leqslant 16 \cdot 2^{-x}$. Так как $(\sqrt{3})^x + 1$ возрастает с увеличением x, а $16 \cdot 2^{-x}$ убывает, и равенство выполняется при $x = 2$, то при $x < 2$ $(\sqrt{3})^x + 1 < 16 \cdot 2^{-x}$. Следовательно, решением неравенства является множество $x \leqslant 2$.

C4 Ответ: 12.

Решение. В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны. Обозначим $BC=a$; $AD=b$ (см. рис. C4–2).

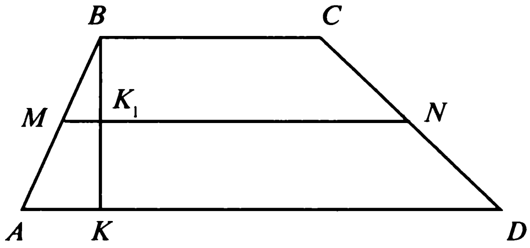

Рис. C4–2.

Получим $a+b=16$, и средняя линия $MN=8$. Далее, $S_{MBCN}=\frac{a+8}{2}BK_1$; $S_{AMND}=\frac{b+8}{2}K_1K$ (BK — высота трапеции).

Так как $BK_1=KK_1$, $\frac{a+8}{b+8}=\frac{5}{11}$, $5b-11a=48$. Составляем систему $\begin{cases} a+b=16, \\ 11a-5b=-48 \end{cases}$, $a=2$; $b=14$.

C5 Ответ: Если $\frac{2-\pi}{4}\leqslant a\leqslant\pi-3$, то $x=\log_2(a+2)$, $y=\sin(2a-1)$, $z=\cos(a+3)$; если $a\in(-\infty;\frac{2-\pi}{4})\cup(\pi-3;\infty)$, то система не имеет решений.

Решение. Введём новые переменные $X=2^x>0$, $Y=\arcsin y$, где $-\frac{\pi}{2}\leqslant Y\leqslant\frac{\pi}{2}$, $Z=\arccos z$, где $0\leqslant Z\leqslant\pi$, и запишем систему через X, Y, Z: $\begin{cases} X+2Y+Z=6a+3, \\ 2X-3Y+3Z=16-a, \\ 3X+Y+2Z=7a+11. \end{cases}$

Полученная система относительно X, Y, Z является линейной и решается по методу исключения неизвестных. Сложив все уравнения системы, получим $X+Z=2a+5$. Тогда из первого уравнения $Y=2a-1$. Подставим $Y=2a-1$ и $Z=2a+5-X$ во второе уравнение, получим $X=2+a$. Тогда $Z=a+3$. Возвращаясь к старым переменным x, y, z, получим

$$\begin{cases} 2^x = a+2, \\ \arcsin y = 2a-1, \\ \arccos z = a+3, \\ a+2>0,\ 0 \leqslant a+3 \leqslant \pi, -\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2a-1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Тогда $x = \log_2(a+2)$, $y = \sin(2a-1)$, $z = \cos(a+3)$ при $\dfrac{2-\pi}{4} \leqslant a \leqslant \pi - 3$.

$\boxed{\text{C6}}$ Ответ: 7 744.

Решение. Пусть x — первая цифра искомого числа, y — последняя. Тогда $N = \overline{xxyy} = 10^3x + 10^2x + 10y + y = 10^2x \cdot 11 + 11y = 11(100x + y) = 11(99x + x + y) = 11(11 \cdot 9x + (x + y))$.

Так как N — полный квадрат и делится на 11, то из последней записи следует, что $11 \cdot 9x + (x+y)$ должно делиться на 11, т.е. $x + y$ делится на 11. Но $0 < x \leqslant 9$ и $0 \leqslant y \leqslant 9$, $1 \leqslant x + y \leqslant 18$, и потому $x + y = 11$. Таким образом, $11 \cdot 9x + 11 = 11(9x+1)$ и $N = 121(9x+1)$, откуда следует, что число вида $9x + 1$, где $1 \leqslant x \leqslant 9$, является точным квадратом. Перебирая последовательно значения x, получаем ряд чисел 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, среди которых только число 64 является полным квадратом. Итак, $N = 121 \cdot 64 = 7\,744$.

Вариант 3

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (В1—В12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Если сложить возраст отца и сына, получится 58. Через четыре года отношение возраста отца к возрасту сына будет равно 3. Сколько лет отцу в настоящий момент?

B2 Заданы функции: 1) $y=(\sqrt{x})^2+\frac{x^2}{2}$; 2) $y=\frac{2^{-x}-2^x}{2}$; 3) $y=\lg^2 x$; 4) $y=\lg x^2+1$. Выберите среди них чётную функцию и вычислите её значение при $x=1$.

B3 Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{x^2+3x-4}{x+1}<0.$$

B4 Внутри круга радиусом 16 см взята точка M на расстоянии 14 см от центра, через которую проведена хорда длиной 19 см. Найдите (в см) модуль разности длин отрезков, на которые точка делит хорду.

B5 На экзамене школьникам были выставлены оценки «2», «3», «4», «5». Оценки «2» и «3» получили одинаковое число учащихся. Оценок «5» было выставлено в 2 раза меньше, чем «2» или «3», а оценок «4» было поставлено больше, чем «2», «3» и «5» вместе взятых. Оценки выше «3» получили менее 14 человек. Сколько выставлено четвёрок, если экзаменовалось не менее 20 человек ?

B6 Найдите площадь фигуры, координаты всех точек которой удовлетворяют условию $|x-1|+|y+5|\leqslant 6$.

B7 Вычислите $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 0{,}4)$.

B8 Найдите сумму абсцисс всех точек на графике функции $y=\frac{3x^2+1}{x-1}$, в которых угол наклона касательной к оси $0X$ равен 45°.

B9 В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро, длина которого равна 18, наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите радиус вписанной в основание пирамиды окружности.

B10 Найдите точку минимума функции $y=\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+5$ или сумму точек минимума, если их несколько.

B11 Найдите количество корней уравнения $\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=1$, принадлежащих промежутку $[0;\pi]$.

B12 Ученик прочёл книгу в 720 страниц, ежедневно читая одинаковое число страниц. Если бы он читал каждый день на 12 страниц больше, то прочёл бы книгу на 3 дня раньше. Сколько дней ученик читал книгу?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2^2 y-\log_2 y^2+8=(\sqrt{16-x^2})^2+x^2,\\ 2^{|x^2-8x+9|}=(\sqrt{8-y^2})^2+y^2.\end{cases}$$

C2 В правильной треугольной призме боковое ребро равно 3, а ребро основания равно 4. Найдите угол между теми диагоналями двух боковых граней, которые выходят из противоположных концов смежного им ребра.

C3 Решите неравенство $\sqrt{25+25x^2-30x}\leqslant 3+\cos^2\frac{5\pi}{3}x$.

C4 В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B, а длины сторон, противолежащих этим углам, соответственно равны 12 и 8. На большей из заданных сторон, как на диаметре, построена окружность, и K – точка пересечения этой окружности с третьей стороной. Найдите отношение, в котором точка K делит длину третьей стороны треугольника.

C5 Определите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} 2x+2(a-1)y=a-4, \\ 2|x+1|+ay=2 \end{cases}$ имеет единственное решение, и найдите это решение.

C6 Найдите положительные значения параметра a, при которых неотрицательные корни уравнения $\cos(3a-7)x - \cos(7a+19)x = 0$, расположенные в порядке возрастания, образуют бесконечную арифметическую прогрессию.

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: 45,5.

Решение. Обозначим возраст отца — x. Тогда возраст сына в настоящий момент равен $58-x$. Через четыре года отцу станет $x+4$ года, а сыну $62-x$. По условию задачи $\dfrac{x+4}{62-x}=3$, $x=45{,}5$.

B2 Ответ: 1. **Указание.** Воспользуйтесь определением чётной функции.

B3 Ответ: 0. **Указание.** Примените метод интервалов к решению рационального неравенства.

B4 Ответ: 11.

Решение. Если обозначить один из отрезков хорды, на которые её делит точка M, через x, то другой отрезок будет равен $19-x$. Проведём через точку M диаметр окружности. Эта точка делит диаметр на отрезки 30 см и 2 см. Тогда по свойству хорд, проведённых через внутреннюю точку круга, будем иметь $(19-x)x=60$, $x=4$ или $x=15$. Следовательно, искомый модуль разности равен 11.

B5 Ответ: 11.

Решение. Пусть x человек получили оценку «4» , y человек — оценку «5» , $2y$ человек — оценку «3» , $2y$ человек — оценку «2». По условию задачи x и y удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} x > 5y, \\ x + y < 14, \\ x + 5y \geqslant 20. \end{cases}$ Из первого и третьего неравенств следует, что $x \geqslant 10$.

Если $x = 10$, то $5y < 10$ и $y = 1$. Но тогда не выполняется третье неравенство системы. Если $x = 11$, то $5y < 11$ и $y = 2$. Тогда выполняются все неравенства системы. Если $x = 12$, то, взяв $y = 2$, мы тем самым нарушим выполнение второго неравенства системы. Таким образом, единственное значение x — это 11.

B6 Ответ: 72. **Указание.** См. решение примера 9.2.9.

B7 Ответ: 2,5. **Указание.** Воспользуйтесь соотношением $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$ и определением $\mathrm{arcctg}\alpha$.

B8 Ответ: 2. **Указание.** Найдите y' и решите уравнение $y' = \mathrm{tg}45°$.

B9 Ответ: 9.

Решение. На рис. B9–3 изображена правильная четырёхугольная пирамида, у которой боковое ребро SA образует с плоскостью основания угол 45°, т.е. $\angle SAH = 45°$, и SH — высота пирамиды.

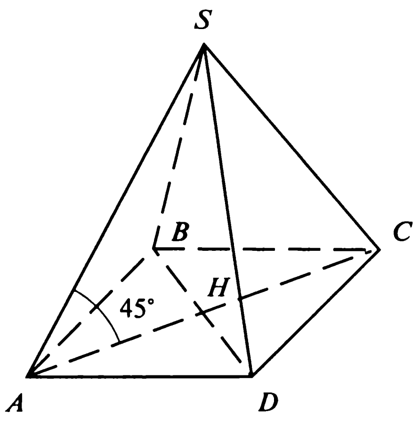

Рис. B9–3.

Тогда $AH = SH = 9\sqrt{2}$. Так как $ABCD$ — квадрат, то радиус вписанной окружности равен половине длины стороны квадрата AD, т.е. $r = 9\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9$.

B10 Ответ: -3. **Указание.** См. пример 8.2.9.

B11 Ответ: 3. **Указание.** Представьте правую часть уравнения в виде $\sin^2 x + \cos^2 x$. Тогда исходное уравнение будет равносильно уравнению вида $\sin x(\sin x - \cos x) = 0$.

B12 Ответ: 15.

Решение. Пусть x — число страниц, прочитанных учеником ежедневно. Тогда количество дней, в течение которых ученик читал книгу, равно $\frac{720}{x}$.

Согласно условию задачи составим уравнение: $\frac{720}{x} - \frac{720}{x+12} = 3$,

$x^2 + 12x - 2\,280 = 0$, $\quad x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 2\,880}}{2} = \frac{-12 \pm 12 \cdot 9}{2}$, $\quad x_1 = 48$, $x_2 = -6$ — не подходит по смыслу задачи. Следовательно, количество дней равно $\frac{720}{48} = 15$.

C1 Ответ: $(2; 0{,}25), (4 - \sqrt{10}; 0{,}25)$.

Решение. Данная система определена на множестве точек, удовлетворяющих системе условий $\begin{cases} 16 - x^2 \geqslant 0, \\ 8 - y^2 \geqslant 0,\ y > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 < y \leqslant 2\sqrt{2}. \end{cases}$

На этом множестве преобразуем исходную систему к виду

$$\begin{cases} \log_2^2 y - 2\log_2 y + 8 = 16 - x^2 + x^2, \\ 2^{|x^2 - 8x + 9|} = 8 - y^2 + y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2^2 y - 2\log_2 y - 8 = 0, \\ 2^{|x^2 - 8x + 9|} = 8. \end{cases}$$

Обозначим $\log_2 y = t$. Тогда первое уравнение системы имеет вид $t^2 - 2t - 8 = 0$, $t_1 = -2$, $t_2 = 4$ или $\left[\begin{array}{l} \log_2 y = -2, \\ \log_2 y = 4, \end{array}\right.$ $y_1 = 0{,}25$, $y_2 = 16$.

Очевидно, что $y_2 = 16$ не принадлежит области определения исходной системы. Из второго уравнения системы следует, что

$|x^2-8x+9|=3,\quad \left[\begin{array}{l} x^2-8x+9=3, \\ x^2-8x+9=-3, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-8x+6=0, \\ x^2-8x+12=0, \end{array}\right. \qquad x_1=4-\sqrt{10},$

$x_2=4+\sqrt{10},\ x_3=2,\ x_4=6.$

Очевидно, что $x_2=4+\sqrt{10}$ и $x_4=6$ не принадлежат области определения исходной системы. Следовательно, решениями исходной системы являются следующие пары чисел: $(4-\sqrt{10};0,25)$, $(2;0,25)$.

C2 Ответ: $\arccos\frac{1}{25}$.

Решение. Рассмотрим правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ (см. рис. C2–3).

Проведём диагонали A_1B и AC_1. Чтобы найти угол между скрещивающимися прямыми, нужно найти угол между лучами с общей вершиной, параллельными данным прямым. Сделаем дополнительные построения. Из точки C_1 проведём прямую, параллельную A_1B, и отложим на ней отрезок $C_1A_2=A_1B$. Искомый угол равен $\angle AC_1A_2$. Из условий задачи следует: $AC_1=A_1B=\sqrt{16+9}=5$ (боковые грани правильной призмы представляют собой равные прямоугольники). ACA_2B — ромб с острым углом 60°, и его диагональ $AA_2=4\sqrt{3}$. Из ΔAC_1A_2 по теореме косинусов находим $\cos\angle AC_1A_2=\frac{1}{25}$.

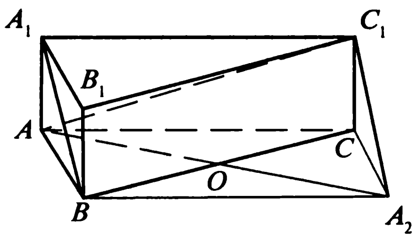

Рис. C2–3.

C3 Ответ: $x=0,6$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства.

Так как $25+25x^2-30x=25+(5x-3)^2-9=16+(5x-3)^2$, то $\sqrt{16+(5x-3)^2}\geqslant 4$ для любого значения x. Правая часть неравенства $3+\cos^2\frac{5\pi}{3}x\leqslant 4$ для любого x. Следовательно, неравенство выполняется только в том случае, когда левая и правая части неравенства равны 4, т.е. $\begin{cases}\sqrt{25+25x^2-30x}=4,\\ 3+\cos^2\dfrac{5\pi}{3}x=4,\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{16+(5x-3)^2}=4,\\ 3+\cos^2\dfrac{5\pi}{3}x=4,\end{cases}$

$x=0{,}6$ является единственным решением исходного неравенства.

$\boxed{\text{С4}}$ Ответ: 1:9.

Решение. Обозначим угол B через α. Тогда $\angle A=2\alpha$; $\angle C=180^\circ-3\alpha$; $CB=12$; $AC=8$ (см. рис. С4–3).

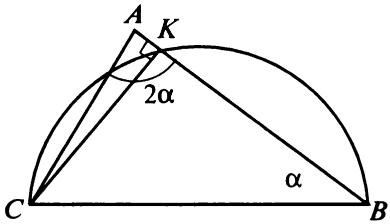

Рис. С4–3.

По теореме синусов: $\dfrac{CB}{\sin 2\alpha}=\dfrac{AC}{\sin\alpha}=\dfrac{AB}{\sin 3\alpha}\Rightarrow\dfrac{12}{\sin 2\alpha}=\dfrac{8}{\sin\alpha}\Rightarrow$

$\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{8}{\sin\alpha}=\dfrac{AB}{\sin 3\alpha}$, $AB=\dfrac{8\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{8\sin\alpha(2\cos^2\alpha+\cos 2\alpha)}{\sin\alpha}=$

$=8(2\cos^2\alpha+\cos 2\alpha)=8\left(2\cdot\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{8}\right)=10.$ Зная длины сторон треугольника, по теореме Герона находим его площадь $S=15\sqrt{7}$. Соединим вершину C с точкой K. Треугольник CKB – прямоугольный, так как $\angle CKB$ опирается на диаметр, т.е. $CK\perp AB$. Тогда $S=15\sqrt{7}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CK$, $CK=3\sqrt{7}$. По теореме Пифагора находим $KB=\sqrt{144-(3\sqrt{7})^2}=9$. Тогда $AK=1$.

$\boxed{\text{С5}}$ Ответ: Если $a\in\left[\dfrac{2}{3};3-\sqrt{5}\right]\cup\{3+\sqrt{5}\}$, то $x=\dfrac{a^2-4a}{4-2a}$, $y=\dfrac{a-4}{a-2}$; если $a\in(3-\sqrt{5};2]$, то $x=\dfrac{a^2-12a+8}{6a-4}$, $y=\dfrac{a}{3a-2}$.

Решение. Пусть $x\geqslant-1$. Тогда система запишется в виде
$\begin{cases}2x+2(a-1)y=a-4,\\ 2x+ay=0.\end{cases}$

Система линейных уравнений имеет единственное решение, если коэффициенты при неизвестных непропорциональны, т.е.

$$\frac{2}{2} \neq \frac{2(a-1)}{a}, \quad a \neq 2.$$

Неизвестные x и y найдём по методу исключения, а именно, вычитая из первого уравнения второе, получим $y = \frac{a-4}{a-2}$ и $x = \frac{a^2-4a}{4-2a}$.

Из условия $x \geqslant -1$ найдём те значения a, при которых $x = \frac{a^2-4a}{4-2a}$ и $y = \frac{a-4}{a-2}$ являются решением исходной системы:

$$\frac{a^2-4a}{4-2a} \geqslant -1, \quad \left[\begin{array}{l} (a^2-6a+4)(a-2) < 0, \\ \begin{cases} a^2-6a+4=0, \\ a-2 \neq 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad a \in (-\infty; 3-\sqrt{5}] \cup (2; 3+\sqrt{5}]. \quad (1)$$

Пусть $x < -1$. Тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} 2x+2(a-1)y = a-4, \\ -2x-2+ay = 2. \end{cases}$$

Единственное решение этой системы существует, если $-\frac{2}{2} \neq \frac{2(a-1)}{a}$, $a \neq \frac{2}{3}$. Тогда, исключая неизвестное x путём сложения уравнений, получим $y = \frac{a}{3a-2}$ и $x = \frac{a^2-12a+8}{6a-4}$.

Из условия $x < -1$ найдём те значения a, при которых $x = \frac{a^2-12a+8}{6a-4}$ и $y = \frac{a}{3a-2}$ являются решением исходной системы:

$$\frac{a^2-12a+8}{6a-4} < -1 \Leftrightarrow (a^2-6a+4)(3a-2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-3-\sqrt{5})(a-3+\sqrt{5})(3a-2) < 0, \quad (2)$$

$$a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (3-\sqrt{5}; 3+\sqrt{5}).$$

На пересечении множеств (1) и (2) исходная система имеет два решения. Следовательно, это множество не удовлетворяет условию задачи. Найдём это пересечение, используя геометрическую интерпретацию (см. рис. С5–3).

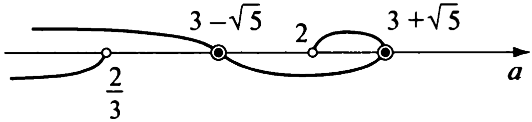

Рис. С5–3.

Пересечением является множество $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(2;3+\sqrt{5})$, которое необходимо исключить из множеств (1) и (2).

Если $a\in\left[\frac{2}{3};2\right]\cup 3+\sqrt{5}$, то система имеет единственное решение, причём при $a\in\left[\frac{2}{3};3-\sqrt{5}\right]\cup\{3+\sqrt{5}\}$ $x=\frac{a^2-4a}{4-2a}$, $y=\frac{a-4}{a-2}$, а при $a\in(3-\sqrt{5};2]$ $x=\frac{a^2-12a+8}{6a-4}$, $y=\frac{a}{3a-2}$.

C6 Ответ: $a\in\left\{\frac{1}{8};\frac{7}{3};20\right\}$.

Решение. Приведём исходное уравнение к виду $\sin((5a+6)x)\cdot\sin((2a+13)x)=0$. Так как по условию $a>0$, то $5a+6\neq 0$ и $2a+13\neq 0$. Следовательно, уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\sin(5a+6)x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi k}{5a+6},\ k\in Z,\\ \sin(2a+13)x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi n}{2a+13},\ n\in Z.\end{array}\right.$

Неотрицательные решения исходного уравнения задаются следующим образом: $\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{\pi k}{5a+6},\ k\in Z,\ k\geqslant 0,\\ x_2=\frac{\pi n}{2a+13},\ n\in Z,\ n\geqslant 0.\end{array}\right.$

Последовательности $x_1=\frac{\pi k}{5a+6}$ и $x_2=\frac{\pi n}{2a+13}$ образуют арифметические прогрессии с первым членом, равным нулю, и разностями $d_1=\frac{\pi}{5a+6}$ и $d_2=\frac{\pi}{2a+13}$ соответственно. Эти прогрессии могут образовать одну бесконечную арифметическую прогрессию, если хотя бы одно из чисел $\frac{d_1}{d_2}$ или $\frac{d_2}{d_1}$ является натуральным числом.

Рассмотрим случай, когда $\frac{d_1}{d_2}=\frac{2a+13}{5a+6}=m$, где m — натуральное число. Тогда $a=\frac{6m-13}{2-5m}$.

Найдём те же значения m, при которых $a>0$: $\frac{6m-13}{2-5m}>0$, $\frac{2}{5}<m<\frac{13}{6}$. Из этого неравенства следует, что $m\in\{1;2\}$ и $a\in\left\{\frac{1}{8};\frac{7}{3}\right\}$.

Рассмотрим случай, когда $\frac{d_2}{d_1}=\frac{5a+6}{2a+13}=l$, где l — натуральное число. Тогда из условия $a > 0$ следует, что $l\in\{1;2\}$ и $a\in\left\{\frac{7}{3};20\right\}$.

Вариант 4

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Прямоугольник, стороны которого равны 189 см и 147 см, разбит на равные квадраты. Найдите количество квадратов наибольшей площади, на которые можно разбить данный прямоугольник, если сторона квадрата измеряется целым числом сантиметров.

B2 Заданы функции: 1) $y=\frac{2^{-x}-2^{x}}{2}$; 2) $y=\frac{2^{-x}+2^{x}}{2}$; 3) $y=(\sqrt[3]{x})^3+x^3$; 4) $y=\sin x(\mathrm{ctg}x+1)$. Выберите среди них нечётную функцию и в ответе укажите её номер.

B3 Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{x-2}{x^2+5x-6}>0.$$

B4 В треугольнике ABC биссектриса AH делит сторону BC на отрезки, длины которых равны 28 и 12. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB-AC=18$.

B5 В саду посажены яблони и груши, причём яблонь меньше, чем груш. Если количество яблонь увеличить вдвое, то общее число деревьев станет больше 27. Если количество груш увеличить вдвое, то общее число деревьев станет меньше 30. Сколько всего деревьев посажено в саду?

B6 В треугольнике с вершинами в точках $A(4;5;0)$, $B(2;3;0)$ и $C(2;5;2)$ найдите в градусах сумму углов при основании AC.

B7 Вычислите sin(arccos 0,8).

B8 Найдите количество точек на графике функции $y=\frac{\sqrt{3}x}{x^2+1}$, в которых угол наклона касательной к оси $0X$ равен $60°$.

B9 В правильной треугольной пирамиде апофема наклонена к плоскости основания под углом $45°$. Найдите периметр основания пирамиды, если её высота равна $6\sqrt{3}$.

B10 Найдите $2m-M$, где m и M соответственно минимум и максимум функции $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

B11 Найдите количество целых решений неравенства

$$(x-4)^2(2+\log_{1/3}(x+1))>0.$$

B12 Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выезжают велосипедист и автобус и встречаются через 3 ч. Какое время (в часах) затратил на весь путь из A в B велосипедист, если автобус затратил на путь из B в A на 8 ч меньше?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^x-10\cdot 2^x+12=(\sqrt{y^2-4})^2-y^2, \\ \log_2(y^2-4y+7)=(\sqrt{2-x^2})^2+x^2. \end{cases}$$

C2 Длина ребра куба равна 6. На рёбрах AD, CD, C_1B_1 взяты соответственно точки M, P, Q так, что $AM=CP=B_1Q=2$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, P, Q, и найдите площадь этого сечения.

C3 Решите неравенство

$$\sqrt{11-9x^2+30x}\geqslant 7+\sin\frac{9\pi}{10}x.$$

C4 Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Окружность с радиусом 6 касается одного из катетов, продолжения другого катета и гипотенузы. Найдите периметр треугольника.

C5 Определите все значения параметра b, при которых система $\begin{cases} 2(b-2)x+2y=b-5, \\ (b-1)x+2|y+1|=2 \end{cases}$ имеет два решения, и найдите эти решения.

C6 Найдите сумму общих членов трёх арифметических прогрессий:

$$\{143;\ 164;\ 185;\ \ldots;\ 10\,622\},$$
$$\{94;\ 122;\ 150;\ \ldots;\ 11\,266\},$$
$$\{122;\ 157;\ 192;\ \ldots;\ 10\,587\}.$$

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: 63. **Указание.** Найдите наибольший общий делитель 189 и 147.

B2 Ответ: 1. **Указание.** Воспользуйтесь определением нечётной функции.

B3 Ответ: –5. **Указание.** Примените метод интервалов.

B4 Ответ: 85.

Решение. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника (см. рис. B4–4) $\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{HC}=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}$.

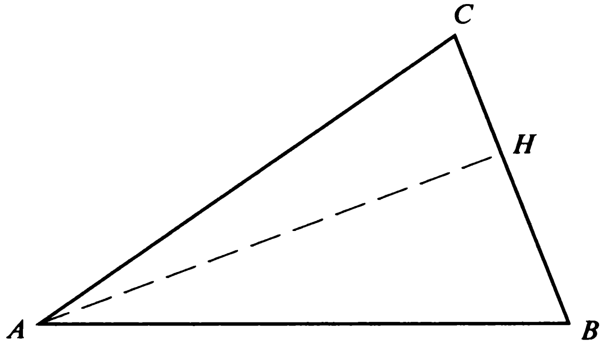

Рис. B4–4.

По свойству пропорции $\frac{AB - AC}{AC} = \frac{4}{3}$ и $AC = \frac{3}{4}(AB - AC) =$ $= \frac{3}{4} \cdot 18 = 13{,}5$. Тогда $AB = \frac{7}{3}AC = \frac{7}{3} \cdot 13{,}5 = 31{,}5$, и периметр равен 85.

B5 Ответ: 19.

Решение. Пусть x — количество посаженных яблонь, y — количество груш. Из условия задачи следует система неравенств $\begin{cases} x < y, \\ 2x + y > 27, \\ x + 2y < 30. \end{cases}$ Из второго неравенства следует, что $x > \frac{27 - y}{2}$.

Тогда для y получим систему неравенств $\begin{cases} \frac{27 - y}{2} < y, \\ \frac{27 - y}{2} + 2y < 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 9, \\ y < 11 \end{cases}$

и $y = 10$ Тогда $\begin{cases} x < 10, \\ x > \frac{17}{2} \end{cases}$ и $x = 9$. Следовательно, общее число деревьев равно 19.

B6 Ответ: 120. **Указание.** Убедитесь в том, что заданный треугольник равносторонний. Для этого найдите длины его сторон.

B7 Ответ: 0,6. **Указание.** Выразите $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и воспользуйтесь определением $\arccos\alpha$.

B8 Ответ: 1. **Указание.** Найдите y' и решите уравнение $y' = \operatorname{tg} 60^\circ$.

B9 Ответ: 54.

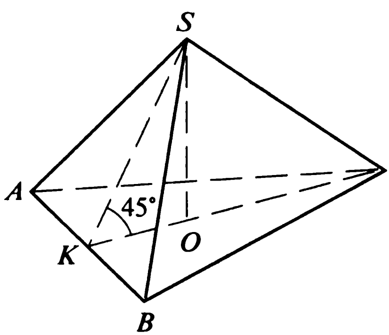

Рис. B9—4.

Решение. На рис. В9–4 изображена правильная треугольная пирамида, т.е. в основании её лежит правильный треугольник, а вершина S проектируется в центр треугольника O.

Так как $\angle SKO = 45°$, то $KO = SO = 6\sqrt{3}$. По свойствам правильного треугольника $KC = 3KO = 18\sqrt{3}$, $KB = KC\text{tg}30° = 18\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 18$, и периметр основания равен 54.

$\boxed{\text{B10}}$ Ответ: –3. **Указание.** См. пример 8.2.9.

$\boxed{\text{B11}}$ Ответ: 7. **Указание.** См. раздел 7.6.

Решение. Так как $(x-4)^2 > 0$ при $x \neq 4$, то исходное неравенство равносильно системе условий $\begin{cases} 2 + \log_{1/3}(x+1) > 0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1/3}(x+1) > \log_{1/3}9 \\ x \neq 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x+1 < 9, \\ x \neq 4 \end{cases}$ и $x \in (-1;4) \cup (4;8)$.

Это множество содержит 7 целых чисел.

$\boxed{\text{B12}}$ Ответ: 12.

Решение. Пусть велосипедист проедет весь путь за x ч, а автобус — за $(x-8)$ ч. Если расстояние от A до B равно l км, то скорости велосипедиста и автобуса соответственно равны $\dfrac{l}{x}$ км/ч и $\dfrac{l}{x-8}$ км/ч. Так как они встретились через 3 ч, то они вместе проехали расстояние, равное l км. Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{3l}{x} + \frac{3l}{x-8} = l,\ x^2 - 14x + 24 = 0,\ x_1 = 12,\ x_2 = 2.$$

По смыслу задачи $x = 12$ ч.

$\boxed{\text{C1}}$ Ответ: (1;3).

Решение. Данная система определена на множестве точек, удовлетворяющих системе условий $\begin{cases} y^2 - 4 \geqslant 0, \\ 2 - x^2 \geqslant 0, \\ y^2 - 4y + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y| \geqslant 2, \\ |x| \leqslant \sqrt{2}. \end{cases}$

На этом множестве преобразуем исходную систему к виду

$$\begin{cases} 4^x - 10 \cdot 2^x + 12 = y^2 - 4 - y^2, \\ \log_2(y^2 - 4y + 7) = 2 - x^2 + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0, \\ \log_2(y^2 - 4y + 7) = 2. \end{cases}$$

Обозначим $2^x = t > 0$. Тогда первое уравнение системы запишется в виде $t^2 - 10t + 16 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 8$ или $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2, \\ 2^x = 8 \end{array}\right.$ и $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Очевидно, что $x_2 = 3$ не принадлежит области определения исходной системы. Из второго уравнения системы следует, что $y^2 - 4y + 7 = 4 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$ и $y_1 = 1$, $y_2 = 3$.

Очевидно, что $y_1 = 1$ не принадлежит области определения системы. Следовательно, решением исходной системы является пара чисел (1;3).

C2 Ответ: $26\sqrt{3}$.

Решение. На рис. С2–4 изображено сечение *PEQRNM* куба плоскостью, проходящей через точки *M, P, Q* (подробности построения рассмотрены в задаче 9.4.1, ч.1).

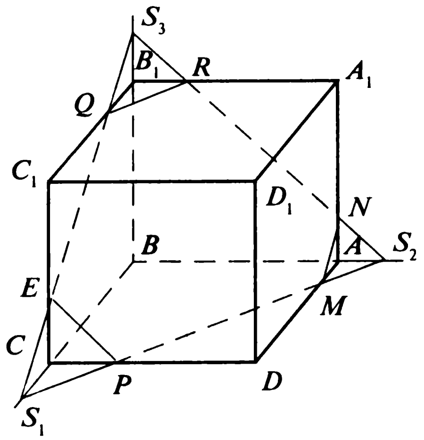

Рис. С2–4.

Легко доказать, что $CS_1 = B_1S_3 = AS_2 = 2$. Следовательно, $BS_1 = BS_2 = BS_3 = 8$. $\Delta S_1S_2S_3$ — равносторонний со стороной $8\sqrt{2}$, и его площадь равна $\frac{1}{2}(8\sqrt{2})^2 \sin 60° = 32\sqrt{3}$. Далее, $\Delta S_1EP = \Delta S_3QR = \Delta S_2MN$. Эти треугольники подобны $\Delta S_1S_2S_3$ с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{4}$. Следовательно, $S_{\Delta S_1EP} = \frac{1}{16}S_{\Delta S_1S_2S_3} = 2\sqrt{3}$. Тогда площадь шестиугольника *PEQRNM* равна разности $S_{\Delta S_1S_2S_3} - 3S_{\Delta S_1EP} = 32\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 26\sqrt{3}$.

C3 Ответ: $x=\frac{5}{3}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства. Так как $11-9x^2+30x=36-(3x-5)^2$, то $\sqrt{36-(3x-5)^2}\leqslant 6$ для любого значения x из области определения неравенства, т.е. $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{11}{3}\right]$.

Правая часть данного неравенства $7+\sin\frac{9\pi}{10}x\geqslant 6$ для любого значения x. Следовательно, неравенство выполняется только в том случае, когда левая и правая части неравенства равны, т.е.

$$\begin{cases}\sqrt{11-9x^2+30x}=6,\\ 7+\sin\frac{9\pi}{10}x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{36-(3x-5)^2}=6,\\ 7+\sin\frac{9\pi}{10}x=6\end{cases}\quad \text{и } x=\frac{5}{3}$$

является единственным решением исходного неравенства.

C4 Ответ: 24.

Решение. Пусть $AB=c$, $AC=b$, $CB=a$. Обозначим точки касания окружности с прямыми, образующими ΔABC, C_1, A_1, B_1 (см. рис. C4–4).

По свойству касательных, проведённых из одной точки к заданной окружности, имеем: $AC_1=AB_1$ и $A_1B=BB_1$, $CC_1=CA_1=6$. Тогда $AC_1=b+6$, $AB_1=c+a-6$.

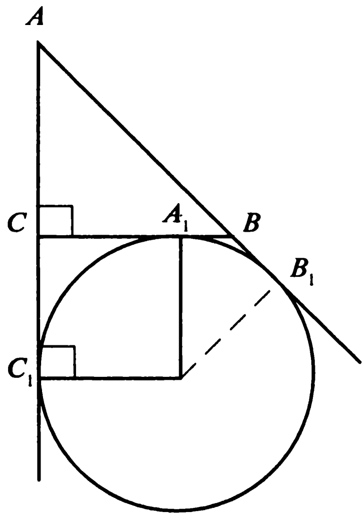

Рис. C4–4.

Составим систему уравнений $\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \text{ (теоремаПифагора)} \\ c = b - a + 12 (AC_1 = AB_1), \\ a \cdot b = 48 \text{ (так как } S = \frac{1}{2} ab = 24). \end{cases}$

Решив систему, получаем $a = 8$, $b = 6$, $c = 10$.

C5 Ответ: Если $b \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (3; 4+\sqrt{5})$, то $x_1 = \frac{b-5}{b-3}$, $y_1 = \frac{b^2-6b+5}{6-2b}$ и $x_2 = \frac{b-1}{3b-5}$, $y_2 = \frac{b^2-14b+21}{6b-10}$.

Решение. Пусть $y \geqslant -1$. Тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} 2(b-2)x + 2y = b-5, \\ (b-1)x + 2y = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, если выполняется условие $\frac{2(b-2)}{b-1} \neq \frac{2}{2}$, следовательно, $b \neq 3$.

По методу исключения находим x и y: $x = \frac{b-5}{b-3}$ и $y = \frac{b^2-6b+5}{6-2b}$.

Из условия $y \geqslant -1$ найдём те значения b, при которых полученное выше решение является решением исходной системы:

$$\frac{b^2-6b+5}{6-2b} \geqslant -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (b^2-8b+11)(b-3) < 0, \\ \begin{cases} b^2-8b+11=0, \\ b \neq 3 \end{cases} \end{array} \right. \text{ и } b \in (-\infty; 4-\sqrt{5}] \cup (3; 4+\sqrt{5}]. \quad (1)$$

Пусть $y < -1$. Тогда имеем $\begin{cases} 2(b-2)x + 2y = b-5, \\ (b-1)x - 2y - 2 = 2. \end{cases}$

Единственное решение этой системы существует, если

$$\frac{2(b-2)}{b-1} \neq \frac{2}{-2} \text{ или } b \neq \frac{5}{3}.$$

Тогда, решив систему, получим $x = \frac{b-1}{3b-5}$ и $y = \frac{b^2-14b+21}{6b-10}$.

Из условия $y < -1$ найдём те значения b, при которых полученное решение является решением исходной системы:

$$\frac{b^2-14b+21}{6b-10} < -1 \Leftrightarrow (b^2-8b+11)(3b-5) < 0 \text{ и}$$

$$b \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (4-\sqrt{5}; 4+\sqrt{5}). \quad (2)$$

На пересечении множеств (1) и (2) система имеет два решения. Найдём это пересечение, используя геометрическую интерпретацию (см. рис. С5–4).

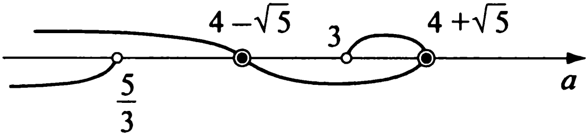

Рис. С5–4.

Пересечением является множество

$$b \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (3; 4+\sqrt{5}). \qquad (3)$$

Убедимся, что на этом множестве нет таких значений b, при которых решения совпадают. С этой целью составим равенство

$$\frac{b-5}{b-3} = \frac{b-1}{3b-5}, \quad b^2 - 8b + 11 = 0, \quad b_{1,2} = 4 \pm \sqrt{5}.$$

Ни одно из этих значений не принадлежит множеству (3). Следовательно, при всех значениях b из множества (3) система имеет два решения.

С6 Ответ: 128 928.

Решение. Общий член первой прогрессии: $a_n = 143 + 21(n-1) = 122 + 21n$; общий член второй прогрессии $b_k = 94 + 28(k-1) = 66 + 28k$ и общий член третьей прогрессии $c_m = 122 + 35(m-1) = 87 + 35m$.

Найдём общие члены первых двух прогрессий из условия

$$a_n = b_k, \quad 122 + 21n = 66 + 28k, \quad 8 + 3n = 4k \Leftrightarrow k = \frac{8+3n}{4} \in N.$$

Очевидно, что k — натуральное число только в случае, когда $n = 4l$. Следовательно, общие члены первых двух прогрессий имеют вид $\alpha_l = 122 + 84l$, $1 \leqslant l \leqslant 125$, так как $122 + 84l \leqslant 10\,622$, $1 \leqslant l \leqslant 125$.

Найдём общие члены двух прогрессий $\{\alpha_l\}$ и $\{c_m\}$ из условия:

$\alpha_l = c_m$, $122 + 84l = 87 + 35m \Leftrightarrow 12l = 5m - 5$ и $l = 5p$, $p \in N$.

Общие члены этих прогрессий $\beta_p = 122 + 420p$ являются общими членами трёх исходных прогрессий. Определим количество этих членов из условия $122 + 420p \leqslant 10\,587$ или $1 \leqslant p \leqslant 24$ и вычислим их сумму S_{24}: $S_{24} = \frac{542 + 10\,202}{2} \cdot 24 = 128\,928.$

Вариант 5

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Цену товара сначала понизили на 20%, а затем повысили на 20%, и она составила 1 152 руб. Какова была первоначальная цена товара (в рублях)?

B2 Периодическая функция с периодом $T=6$ определена на всей числовой оси и на промежутке $[-2;4]$ имеет вид $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2-1, \text{ если } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 3-x, \text{ если } 0<x<4.\end{cases}$ Найдите число нулей этой функции на промежутке $[-2;12]$.

B3 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{2^{2x-1}}=2\cdot\sqrt[3]{4}$.

B4 В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона равна 4, меньшая диагональ перпендикулярна большей боковой стороне и равна $4\sqrt{5}$. Найдите длину большего основания.

B5 Найдите количество двузначных чисел, записанных двумя различными чётными цифрами.

B6 Найдите длину стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность $x^2+y^2=R^2$, если точка $A(3;4)$ является одной из его вершин.

B7 Найдите значение выражения $2^{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}:2^{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$.

B8 Найдите сумму абсцисс всех точек графика функции $y=\dfrac{x^2}{x-2}$, в которых касательная параллельна или совпадает с прямой $y=-x+3$.

B9 Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю, равной 12. Найдите $S_{\text{полн}}$ — полную поверхность цилиндра. В ответе укажите значение $\dfrac{S_{\text{полн}}}{\pi}$.

B10 Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = 6\cos x + 8\sin x - 3$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

B11 Найдите в градусах сумму корней уравнения $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x}{\cos x + 1} = 0$, принадлежащих промежутку $[0; 180^\circ]$.

B12 Два тела начали двигаться одновременно в одном и том же направлении из двух точек, расстояние между которыми 20 м. Одно из них, находящееся позади, движется равноускоренно и проходит за первую секунду 25 м, а за следующую на $\dfrac{1}{3}$ м больше. Другое тело движется равнозамедленно и проходит за первую секунду 30 м, а за следующую на $\dfrac{1}{2}$ м меньше. Через сколько секунд первое тело нагонит второе?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(\cos 2x + 3\cos x + 4) = 1, \\ 2^{2y}\sin x + 2^y \sin x + 3\sqrt{3} = 0. \end{cases}$$

C2 Длина ребра тетраэдра $ABCD$ равна 6. На рёбрах AD, CD и CB расположены соответственно точки M, N, P так, что $DM = CN = 2$ и $CP = 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N, P, и найдите отношение длины большего отрезка к длине меньшего отрезка, на которые это сечение делит сторону AB.

C3 Решите неравенство

$$\sqrt{3x-2} + (2x-10)\sqrt[4]{3x-2} + x^2 - 10x + 6 \leqslant 0.$$

C4 В треугольник с длинами сторон, равными 13, 14, 15, вписан полукруг с диаметром, лежащим на большей из сторон. Найдите отношение длины радиуса этого полукруга к радиусу описанной около треугольника окружности.

C5 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $9^x + 2(a-1)3^x + a^2 - 3 = 0$ не имеет решения.

C6 Восстановите вид функции $f(x)$ на множестве $x < 2$, если график функции $f(x)$ симметричен относительно точки (2;3) и на множестве $x > 2$ $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} + \dfrac{1}{x-1}$.

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: 1 200.

Решение. Пусть x — первоначальная цена товара. После понижения на 20% она стала равной $0{,}8x$, а затем эту цену увеличили на 20%, что от $0{,}8x$ составляет $0{,}16x$, т.е. после повышения она стала равной $0{,}96x = 1\,152$, $x = 1\,200$.

B2 Ответ: 5. **Указание.** Постройте график функции на промежутке $[-2;12]$, используя определение периодической функции.

B3 Ответ: 3. **Указание.** Перейдите к основанию 2 и приравняйте показатели в левой и правой частях равенства.

B4 Ответ: 10.

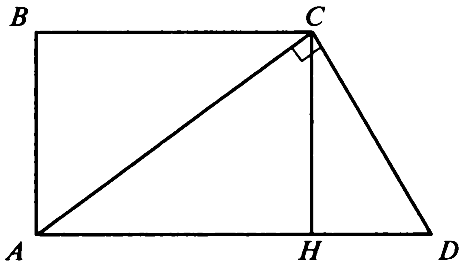

Рис. B4–5.

Решение. Из рис. B4–5 следует: $AC \perp CD$ и $AC = 4\sqrt{5}$, $CH \perp AD$, $CH = AB = 4$. Из ΔABC $BC = 8$ (теорема Пифагора). Из ΔACD $CH^2 = AH \cdot HD$ (свойство высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу). Тогда $16 = 8 \cdot HD$ и $HD = 2$. Отметим, что этот результат можно получить, рассматривая подобные треугольники ACH и CHD. Следовательно, $AD = 10$.

B5 Ответ: 16.

Решение. Рассмотрим двузначное число $\overline{a_0 a_1}$ и множество чётных цифр $\{0;2;4;6;8\}$. Очевидно, что a_0 можно выбрать из множества $\{2;4;6;8\}$, так как $a_0 \neq 0$. Таким образом, a_0 можно выбрать четырьмя способами. Так как $a_0 \neq a_1$, то при каждом выборе a_0 цифру a_1 можно выбрать также четырьмя способами. Действительно, пусть $a_0 = 2$. Тогда a_1 может быть выбрано из элементов $0;4;6;8$. Следовательно, количество заданных двузначных чисел равно $4 \cdot 4 = 16$.

B6 Ответ: 5.

Решение. Так как точка A лежит на окружности, то её координаты удовлетворяют уравнению окружности $9 + 16 = R^2$, $R = 5$. Сторона же правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна его радиусу.

B7 Ответ: 4.

Решение. Так как $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1$ и $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$, то $2^{\sqrt{3}+1} : 2^{\sqrt{3}-1} = 2^2 = 4$.

B8 Ответ: 4. **Указание.** Найдите y' и используйте условие параллельности прямых.

B9 Ответ: 90.

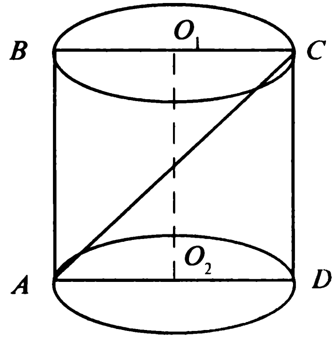

Рис. B9–5.

Решение. $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн}}$, где $S_{\text{бок.}}$ — боковая поверхность цилиндра, $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания цилиндра. Рассмотрим осевое сечение $ABCD$ цилиндра (см. рис. В9–5).

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot AD \cdot AB = \pi AD^2. \ S_{\text{осн}} = \pi \frac{AD^2}{4}; \ AD = \frac{AC\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

$$S_{\text{полн}} = \pi AD^2 + \pi \frac{AD^2}{4} = \pi \frac{5AD^2}{4} = 90\pi.$$

B10 Ответ: 10. **Указание.** См. пример 8.2.23.

B11 Ответ: 180. **Указание.** Так как по условию задачи $\cos x + 1 \neq 0$, то $\sin x \neq 0$ и уравнение равносильно уравнению вида $\sin x = \frac{1}{2}$.

B12 Ответ: 16.

Решение. Путь, пройденный каждым телом за t с, определяется формулой $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определим v_0 и a для каждого из тел, подставляя в формулу соответствующие данные.

Для 1-го тела:

$$\left.\begin{aligned} &t=1, \ 25 = v_0 + \frac{a}{2}, \\ &t=2, \ 50\frac{1}{3} = 2v_0 + 2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ a = \frac{1}{3}; \ v_0 = 24\frac{5}{6} \text{ и } S_1 = 24\frac{5}{6}t + \frac{t^2}{6}.$$

Для 2-го тела:

$$\left.\begin{aligned} &t=1, \ 30 = v_0 + \frac{a}{2}, \\ &t=2, \ 59{,}5 = 2v_0 + 2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ a = -\frac{1}{2}; \ v_0 = 30{,}25 \text{ и } S_2 = 30\frac{1}{4}t - \frac{t^2}{4}.$$

В тот момент, когда первое тело догонит второе, $S_1 = S_2 + 20$ или $24\frac{5}{6}t + \frac{t^2}{6} = 30\frac{1}{4}t - \frac{t^2}{4} + 20 \Leftrightarrow t^2 - 13t - 48 = 0$.

Это уравнение имеет один положительный корень $t = 16$.

C1 Ответ: $\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k; 1\right)$, $k \in Z$.

Решение. Из первого уравнения исходной системы следует, что $\cos 2x + 3\cos x + 4 = 2 \Leftrightarrow \cos 2x + 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$. Если $\cos x = -1$, то $\sin x = 0$, что не удовлетворяет второму уравнению системы. Если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отметим, что $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ не удовлетворяет второму уравнению системы. Подставим $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ во второе уравнение системы: $2^{2y}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2^y\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2^{2y} + 2^y - 6 = 0.$

Обозначим $2^y = t > 0$ и перепишем уравнение через t: $t^2 + t - 6 = 0,\ t_1 = 2,\ 2^y = 2,\ y = 1$. Из решения системы уравнений $\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ найдём $x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k,\ k \in Z$. Решениями исходной системы являются пары чисел $\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k; 1\right),\ k \in Z$.

C2 Ответ: 4.

Решение. Строим сечение $MNPQ$ (см. пример 9.4.1, рис. С2–5).

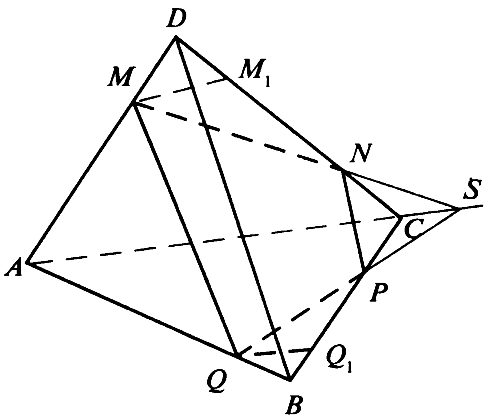

Рис. С2–5.

Пусть $QB = x$. Тогда $AQ = 6 - x$. Проводим $QQ_1 \parallel AC$ и $MM_1 \parallel AC$. $\Delta QQ_1P \sim \Delta PCS$, $\frac{QQ_1}{CS} = \frac{Q_1P}{PC}$, $CS = \frac{QQ_1 \cdot PC}{Q_1P} = \frac{x \cdot 3}{3 - x}$, так как ΔQQ_1B — равносторонний. Из равенства ΔMM_1N и ΔNCS следует, что $CS = 2$. Тогда $\frac{3x}{3 - x} = 2$ и $x = \frac{6}{5}$. $\frac{AQ}{QB} = \frac{6 - 1{,}2}{1{,}2} = 4$.

С3 Ответ: $x \in [1;6]$. **Указание**. См. пример 7.6.8.

Решение. Левую часть неравенства можно рассматривать как квадратный трёхчлен относительно $\sqrt[4]{3x-2}$. Неравенство решается путём разложения квадратного трёхчлена на множители. Если квадратный трёхчлен нельзя разложить на множители, то неравенство решения не имеет. Обозначим $\sqrt[4]{3x-2} = t \geqslant 0$ и найдём, если это возможно, корни квадратного трёхчлена:

$$t^2 + (2x-10)t + x^2 - 10x + 6 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{10-2x \pm \sqrt{(2x-10)^2 - 4(x^2-10x+6)}}{2} = \frac{10-2x \pm 6}{2},$$

$$t_1 = 8 - x, \quad t_2 = 2 - x.$$

Возвращаясь к переменной x, запишем исходное неравенство в виде $(\sqrt[4]{3x-2} + x - 8)(\sqrt[4]{3x-2} + x - 2) \leqslant 0$.

Функция $y_1 = \sqrt[4]{3x-2} + x - 8$ монотонно возрастает при $x \geqslant \frac{2}{3}$. При $x = 6$ $y_1 = 0$. Следовательно, $y_1 < 0$ при $\frac{2}{3} \leqslant x < 6$ и $y_1 > 0$ при $x > 6$. Функция $y_2 = \sqrt[4]{3x-2} + x - 2$ также монотонно возрастает при $x \geqslant \frac{2}{3}$. При $x = 1$ $y_2 = 0$. Следовательно, $y_2 < 0$ при $\frac{2}{3} \leqslant x < 1$, и $y_2 > 0$ при $x > 1$. Тогда на интервале $(1;6)$ y_1 и y_2 имеют разные знаки и $y_1 \cdot y_2 < 0$. Следовательно, решением исходного неравенства является множество $[1;6]$.

С4 Ответ: $\frac{448}{585}$.

Решение. Пусть ABC — заданный треугольник, r – радиус полукруга, $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$ (см. рис. С4–5).

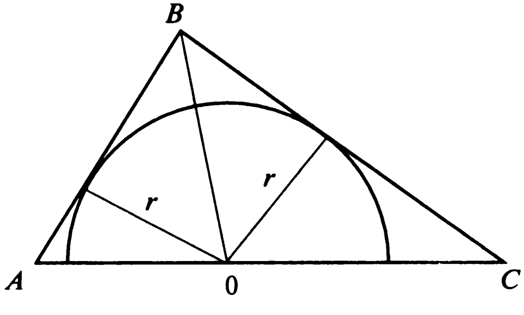

Рис. С4–5.

$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}BC\cdot r=7r.$ $S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}AB\cdot r=6{,}5r.$ $S_{\Delta ABC}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=$ $=84$ (формула Герона). С другой стороны, $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABO}+S_{\Delta OBC}=$ $=13{,}5r$. Следовательно, $r=\frac{84}{13{,}5}=\frac{56}{9}$.

Обозначив R – радиус описанной около треугольника ABC окружности, получим $84=\frac{13\cdot 14\ 15}{4R}$, $R=\frac{65}{8}$, $\frac{r}{R}=\frac{448}{585}$.

$\boxed{\text{C5}}$ Ответ: $[\sqrt{3};\infty)$.

Решение. Введём замену $y=3^x>0$. Тогда уравнение запишется в виде $y^2+2(a-1)y+a^2-3=0$ и задача сводится к исследованию квадратного уравнения в зависимости от параметра a. Необходимо найти все значения параметра a, при которых квадратное уравнение не имеет положительных корней. С этой целью рассмотрим следующие варианты.

1) Если дискриминант квадратного уравнения $D<0$, то уравнение не имеет корней. Следовательно, найдём те значения a, при которых $D=4(a-1)^2-4(a^2-3)<0$, $a>2$.

2) Квадратное уравнение имеет два отрицательных корня y_1 и y_2. Этот вариант возможен, если

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ y_1+y_2<0, \\ y_1\cdot y_2>0, \end{cases} \begin{cases} a\leqslant 2, \\ 2(a-1)>0. \\ a^2-3>0. \end{cases} \text{Тогда } \sqrt{3}<a\leqslant 2.$$

3) Квадратное уравнение имеет два корня: $y_1<0, y_2=0$. Этот вариант возможен, если $\begin{cases} D>0, \\ y_1<0, \\ y_1\cdot y_2=0, \end{cases} \begin{cases} a<2, \\ a-1>0. \\ a^2-3=0. \end{cases}$ Тогда $a=\sqrt{3}$.

4) Квадратное уравнение имеет кратный нулевой корень, т.е. $y_1=y_2=0$. Этот вариант невозможен, так как система $\begin{cases} D=0, \\ y_1=0, \\ y_2=0, \end{cases} \begin{cases} a=2, \\ a=1, \\ a=\pm\sqrt{3} \end{cases}$ не имеет решения.

Следовательно, если $a\in[\sqrt{3};\infty)$, то исходное уравнение не имеет решения.

$\boxed{\text{С6}}$ Ответ: $f(x) = -\sqrt[4]{26-5x} + \dfrac{6x-17}{x-3}$, $x<2$. **Указание.** Введите новые переменные $u = x-2$, $v = y-3$.

Решение. Для того чтобы восстановить вид функции в области $x<2$, используя симметрию её графика, введём новые переменные $u = x-2$, $v = y-3$, осуществляющие параллельный перенос начала системы координат OXY в точку $O'(2;3)$.

Найдём зависимость v от u на множестве $u>0$, используя $y = \sqrt[4]{5x+6} + \dfrac{1}{x-1}$ на множестве $x>2$. Так как $y = v+3$, то $v = y-3 = \sqrt[4]{5x+6} + \dfrac{1}{x-1} - 3$.

Подставив в последнее равенство $x = u+2$, получим $v = \sqrt[4]{5u+16} + \dfrac{1}{u+1} - 3 = \sqrt[4]{5u+16} - \dfrac{3u+2}{u+1}$, где $u>0$.

Так как график $f(x)$ симметричен относительно точки $(2;3)$, то график $v(u)$ будет симметричен относительно точки O'. А симметрия относительно начала координат означает, что $v(u)$ — нечётная функция. Доопределим функцию $v(u)$ в области $v<0$ по правилу нечётной функции: $v(u) = -v(-u) = -\left(\sqrt[4]{16-5u} - \dfrac{2-3u}{1-u}\right) =$ $= -\sqrt[4]{16-5u} + \dfrac{3u-2}{u-1}$, где $u<0$.

Переходя к исходным переменным x и y, получим

$$y = v+3 = -\sqrt[4]{16-5u} + \frac{3u-2}{u-1} + 3 = -\sqrt[4]{16-5(x-2)} + \frac{6(x-2)-5}{x-3} =$$

$$= -\sqrt[4]{26-5x} + \frac{6x-17}{x-3}, \text{ где } x<2.$$

Вариант 6

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак ««минус»» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Числитель и знаменатель дроби — положительные числа. На сколько процентов увеличится дробь, если числитель увеличить на 28,7%, а знаменатель уменьшить на 28,5%?

B2 Наименьшее из чисел m, n, k обозначается $min(m;\ n;\ k)$. Если числа равны,. то $min(m;\ n;\ k) = m = n = k$. Постройте график функции $y = min\left\{3x+2; x^2-2; \frac{7}{4}\right\}$ и найдите наибольшее значение функции на промежутке $[-2;3]$.

B3 Найдите корень уравнения $\left(\frac{5}{7}\right)^{x+3} = \left(\frac{49}{25}\right)^{x+6}$

B4 В трапеции длины оснований равны 12 и 20, а центр описанной окружности лежит на большем основании. Вычислите площадь трапеции.

B5 Найдите количество трёхзначных чётных чисел, которые можно составить из цифр 0; 1; 2; 3; 4; 5.

B6 Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x+5y-8=0$; $2x+y+5=0$; $x=-2$; $x=3$.

B7 Найдите значение выражения $\left(3^{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

B8 Найдите количество точек на графике функции $y = \frac{4x^2-5x-1}{x}$, в которых касательная параллельна или совпадает с прямой $y = 6x+1$.

B9 В прямой треугольной призме стороны основания равны 6, 8, 10. Площадь полной поверхности равна 240. Найдите высоту призмы.

B10 Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = 80x - (x+2)^5$ на отрезке $[-5;-3]$.

B11 Найдите в градусах сумму корней уравнения

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2\cos(\pi - x)\sin(\pi + x),$$

принадлежащих интервалу $(-150°;250°)$.

B12 По графику поезд должен проходить перегон $AB = 20$ км с постоянной скоростью. Поезд прошёл половину пути с заданной скоростью и остановился на 3 минуты, после чего ему пришлось двигаться на 10 км/час быстрее, чтобы вовремя прийти в пункт B. Второй раз поезд опять застрял на полпути уже на 5 мин. С какой скоростью (в км/ч) он должен был идти оставшуюся часть пути, чтобы прийти в B по расписанию?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{2\cos^2 x - \sin x + \frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}, \\ \cos x \log_2^2 y + \cos x \log_2 y + 3\sqrt{3} = 0. \end{cases}$$

C2 Высота правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и сторона её основания равны 5. Найдите расстояние между прямой AB и плоскостью SCD.

C3 Решите неравенство $\sqrt[4]{4-3x} + \dfrac{2x^2 + 11x - 6}{\sqrt[4]{4-3x}} \leqslant 3x + 5$.

C4 Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

C5 Найдите все значения a, при которых неравенство $\cos^2 x + 2a\sin x < a^2 - 2a - 2$ выполняется для всех значений x.

C6 Восстановите вид функции $f(x)$ на множестве $x > -1$, если график функции $f(x)$ симметричен относительно точки $(-1;2)$ и на множестве $x < -1$ $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + \sqrt[3]{2x+10}$.

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: 80.

Решение. Обозначим дробь $\frac{a}{b}$ $(a > 0; b > 0)$. После изменения она станет равной $\frac{1\,287a}{715b}$. Далее, $\frac{1\,287a}{715b} - \frac{a}{b} = \frac{572a}{715b}$, что составляет 80% от дроби $\frac{a}{b}$.

B2 Ответ: 1,75. **Указание.** См. пример 10.1.56.

B3 Ответ: –5. **Указание.** Перейдите к основанию $\frac{5}{7}$ в правой части уравнения.

B4 Ответ: 128.

Решение. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH$ (см. рис. B4–6).

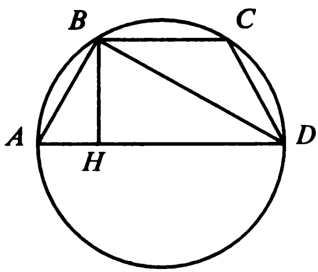

Рис. B4—6.

Задача сводится к нахождению BH. Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобочная. Из этого следует, что $AH = \frac{AD - BC}{2} = 4$. Из подобия ΔABH и ΔHBD следует, что $BH^2 = AH \cdot HD = 64$; $BH = 8$; $S_{ABCD} = 128$.

B5 Ответ: 90.

Решение. Рассмотрим трёхзначное число $\overline{a_0a_1a_2}$. Очевидно, что a_0 мы выбираем из цифр $\{1;2;3;4;5\}$. Таким образом, a_0 можно выбрать пятью способами. При каждом выборе a_0 a_1 можно выбрать из цифр $\{0;1;2;3;4;5\}$, т.е. шестью способами. Следовательно, двузначное число $\overline{a_0a_1}$ можно выбрать $5\cdot 6=30$ способами. Цифра a_2 может принимать значения из множества $\{0;2;4\}$, т.е. для a_2 существует три варианта возможных значений. Тогда количество заданных трёхзначных чисел равно $30\cdot 3=90$.

B6 Ответ: 37,5. **Указание.** Постройте заданную фигуру, убедитесь, что это трапеция, и найдите координаты её вершин. Зная координаты вершин, легко вычислить длины оснований и высоту полученной трапеции.

B7 Ответ: 9. **Указание.** Представьте $8+2\sqrt{15}=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$.

B8 Ответ: 2. **Указание.** Найдите y' и используйте условие параллельности прямых.

B9 Ответ: 8.

Решение. $S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}$, $S_{бок}=P\cdot H$, где P — периметр, H — высота призмы, равная боковому ребру, т.е. $S_{бок}=24H$. Площадь основания вычисляется по формуле Герона и равна 24. Тогда $240=24H+48$, $H=8$.

B10 Ответ: –445.

Решение. Найдём критические точки функции:

$$y'=80-5(x+2)^4,\ (x+2)^4=16,\ \left[\begin{array}{l}x+2=2,\\ x+2=-2\end{array}\right.,\ x_1=0,\ x_2=-4.$$

На отрезок $[-5;-3]$ попадает только $x=-4$. Найдём значения функции в точках $x=-5$, $x=-4$, $x=-3$: $f(-5)=-157$, $f(-4)=-288$, $f(-3)=-239$. Следовательно, на отрезке $[-5;-3]$ $f_{наиб}=-157$, $f_{наим}=-288$ и их сумма равна –445.

B11 Ответ: 420. **Указание.** Воспользуйтесь формулами приведения.

B12 Ответ: 60.

Решение. Пусть V км/ч — искомая скорость, а V_1 км/ч — скорость поезда по графику. Первую половину пути поезд проходил за $\frac{10}{V_1}$ ч, на преодоление второй половины пути он в первый раз затратил $\frac{10}{V_1+10}+\frac{1}{20}$ ч, а во второй раз $\frac{10}{V}+\frac{1}{12}$ часов, но оба раза поезд пришёл вовремя.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} \frac{10}{V_1}=\frac{10}{V_1+10}+\frac{1}{20}, \\ \frac{10}{V_1}=\frac{10}{V}+\frac{1}{12}, \end{cases}$ решением которой являются значения $V_1=40$, $V=60$.

C1 Ответ: $\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi k;\ \frac{1}{8}\right),\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi k;\ 4\right)$, $k\in Z$.

Решение. Из первого уравнения исходной системы следует, что $2\cos^2 x-\sin x+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$, $2\sin^2 x+\sin x-1=0$, $\sin x=-1$, $\sin x=\frac{1}{2}$. Если $\sin x=-1$, то $\cos x=0$, что не удовлетворяет второму уравнению. Если $\sin x=\frac{1}{2}$, то $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отметим, что $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ не удовлетворяет второму уравнению, так как в этом случае получается уравнение вида $\log_2^2 y+\log_2 y+6=0$, не имеющее решений. Подставим $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ во второе уравнение: $-\frac{\sqrt{3}}{2}\log_2^2 y-\frac{\sqrt{3}}{2}\log_2 y+3\sqrt{3}=0$, $\log_2^2 y+\log_2 y-6=0$. Обозначим $\log_2 y=t$. Тогда $t^2+t-6=0$, $t=2$ и $t=-3$ и $\left[\begin{array}{l}\log_2 y=2, \\ \log_2 y=-3,\end{array}\right.$ $y_1=4, y_2=\frac{1}{8}$.

Из решения системы уравнений $\begin{cases} \sin x=\frac{1}{2}, \\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ найдём $x=\frac{5}{6}\pi+2\pi k$, $k\in Z$. Решениями исходной системы являются следующие пары чисел: $\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi k;\frac{1}{8}\right)$ и $\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi k;4\right)$, $k\in Z$.

$\boxed{\text{C2}}$ **О т в е т:** $2\sqrt{5}$.

Р е ш е н и е. Проведём плоскость SMN, где M и N — середины рёбер AB и DC (см. рис. С2–6).

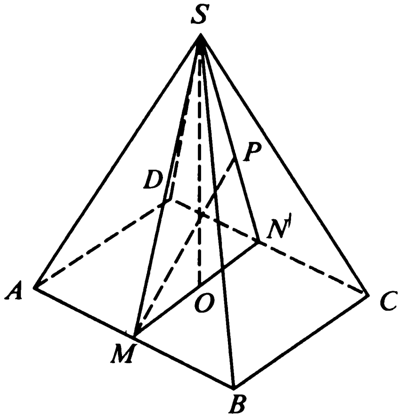

Рис. С2–6.

В плоскости NSM из точки M опустим перпендикуляр MP на прямую SN. Очевидно, что $MP \perp$ плоск. DSC, и длина этого перпендикуляра будет расстоянием от прямой AB до плоскости DSC.

$S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} SO \cdot MN = \frac{25}{2}$, $\frac{25}{2} = \frac{1}{2} SN \cdot MP$, $MP = \frac{25}{SN}$.

Из ΔSON: $SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, $MP = 2\sqrt{5}$.

$\boxed{\text{C3}}$ **О т в е т:** $[-4;1]$. **У к а з а н и е.** См. пример 7.6.8.

Решение. Преобразуем исходное неравенство к виду $\sqrt{4-3x} - (3x+5)\sqrt[4]{4-3x} + 2x^2 + 11x - 6 \leqslant 0$ при условии $4 - 3x > 0$.

Обозначим $\sqrt[4]{4-3x} = t > 0$ и найдём, если это возможно, корни квадратного трёхчлена относительно t:

$$t^2 - (3x+5)t + 2x^2 + 11x - 6 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{3x + 5 \pm \sqrt{(3x+5)^2 - 8x^2 - 44x + 24}}{2} = \frac{3x + 5 \pm (x-7)}{2},$$

$t_1 = 2x - 1$, $t_2 = x + 6$.

Возвращаясь к переменной x, запишем исходное неравенство в виде $(\sqrt[4]{4-3x}-6-x)(\sqrt[4]{4-3x}-2x+1)\leqslant 0$.

Функция $y_1=\sqrt[4]{4-3x}-6-x$ монотонно убывает при $x<\frac{4}{3}$. При $x=-4$ $y_1=0$. Следовательно, при $x<-4$ $y_1>0$ и при $-4<x<\frac{4}{3}$ $y_1<0$. Функция $y_2=\sqrt[4]{4-3x}-2x+1$ также монотонно убывает при $x<\frac{4}{3}$. При $x=1$ $y_2=0$. Следовательно, при $x<1$ $y_2>0$, а при $1<x<\frac{4}{3}$ $y_2<0$. Тогда на интервале $(-4;1)$ $y_1\cdot y_2<0$ и решением исходного неравенства является множество $[-4;1]$.

C4 Ответ: 0,75.

Решение. Пусть O — точка пересечения медиан ΔABC (см. рис. C4–6).

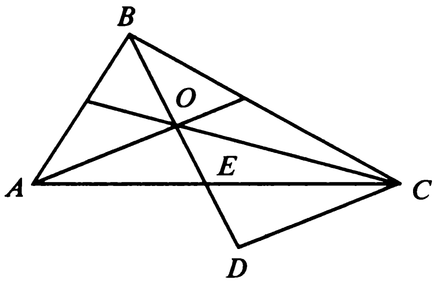

Рис. C4–6.

На продолжении медианы BE отложим $ED=OE$. По свойству медиан стороны ΔCDO равны $\frac{2}{3}$ сторон треугольника, составленного из медиан. Обозначив площадь последнего S_1, получим $S_1=\frac{9}{4}S_{\Delta CDO}$. С другой стороны, ΔCDO составлен из двух, а ΔABC из шести треугольников, равновеликих ΔCEO. Поэтому $S_{\Delta CDO}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$. Следовательно, $\frac{S_1}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3}{4}$.

C5 Ответ: $(-\infty;-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{6};\infty)$.

Решение. Введём замену $y=\sin x$, $|y|\leqslant 1$. Тогда неравенство запишется в виде $1-y^2+2ay<a^2-2a-2$, $y^2-2ay+a^2-$

$-2a-3>0$, где $-1\leqslant y\leqslant 1$, и задача сводится к следующему: найти все значения a, при которых функция $f(y)=y^2-2ay+a^2-2a-3$ принимает положительные значения на отрезке $[-1;1]$. Эту задачу можно сформулировать так: найти все значения a, при которых наименьшее значение функции $f(y)$ на отрезке $[-1;1]$ положительно. Для этого найдём $f'(y)$ и приравняем нулю:

$f'(y)=2y-2a=0$, $y=a$ — точка минимума данной функции.

Исследуем в зависимости от a три значения функции $f(y)$: $f(a)=-2a-3$; $f(-1)=a^2-2$; $f(1)=a^2-4a-2$.

Если $a\leqslant -1$, то $f_{\text{наим}}=f(-1)>0$.

Если $-1<a<1$, то $f_{\text{наим.}}=f(a)>0$.

Если $a\geqslant 1$, то $f_{\text{наим}}=f(1)>0$.

Составим системы неравенств, соответствующие этим условиям, и решим их:

1) $\begin{cases} a\leqslant -1, \\ a^2-2>0, \end{cases}$ $a<-\sqrt{2}$;

2) $\begin{cases} -1<a<1, \\ -2a-3>0, \end{cases}$ $\varnothing$;

3) $\begin{cases} a\geqslant 1, \\ a^2-4a-2>0, \end{cases}$ $a>2+\sqrt{6}$.

Таким образом, исходное неравенство выполняется для всех значений x, если $a\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{6};\infty)$.

C6 Ответ: $f(x)=\dfrac{3x+11}{x+3}-\sqrt[3]{6-2x}$, $x>-1$. **Указание.** Введите новые переменные: $u=x+1$, $v=y-2$ (см. решение задачи С6–5). Тогда зависимость v от u имеет вид

$$v=\frac{4-u}{u-2}+\sqrt[3]{2u+8},\ \text{где } u<0.$$

Для $u>0$ $v(u)$ доопределяют по правилу нечётной функции $v(u)=-v(-u)=\dfrac{u+4}{u+2}-\sqrt[3]{8-2u}$. Тогда функция $f(x)$ на множестве $x>-1$ имеет вид $f(x)=\dfrac{3x+11}{x+3}-\sqrt[3]{6-2x}$.

Вариант 7

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак ««минус»» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Зарплата работника состоит из двух частей: оклада и надбавок. Если оклад увеличить на 50%, то зарплата возрастёт на 40%. На сколько процентов нужно увеличить надбавки, чтобы при прежнем окладе зарплата возросла также на 40%?

B2 Найдите значение произведения

$$f(x-3)\cdot f(x-7) \text{ при } x=3, \text{ если } f(x)=\frac{5x-2}{x+5}.$$

B3 Найдите корень уравнения

$$\log_5(3-\log_3(x+1))=0.$$

B4 В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $\sin\angle A=\frac{1}{3}$, $\sin\angle B=\frac{2}{9}$, сумма длин диагоналей равна 20. Найдите длину большей диагонали.

B5 В розыгрыше кубка принимают участие 10 команд. Сколькими способами могут быть распределены 1, 2 и 3 места? В ответе укажите общее количество способов.

B6 Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $3x+5y-15=0$, $5x+7y-35=0$ и осями координат.

B7 Вычислите $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha=3$.

B8 Материальная точка движется прямолинейно вдоль оси OX по закону $x(t)=t^3-5t^2+4$ (x — координата в метрах, t —

время в секундах). Через сколько секунд после начала движения её скорость будет равна 8 м/с?

B9 Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $\sqrt{26}$, а боковое ребро равно 7. Найдите объём пирамиды.

B10 Найдите сумму целых значений a, при которых функция $y = x^3 - 3(a+2)x^2 + 3x - 10$ возрастает для всех значений x.

B11 Найдите количество целых решений неравенства

$$(7^{\sqrt{x+3}} - 1)(3^x - 243) < 0.$$

B12 На прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работать на 15 мин раньше второго. Когда второй экскаватор прокопал 28 м, оказалось, что он отстаёт от первого на 2 м. С какой скоростью (в м/ч) копает первый экскаватор, если второй выкапывает в час на 1 м больше первого?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} 3y \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x+1} = y\sqrt{3} - 2\sqrt{3}, \\ x \cdot 3^{y+1} + 3^{y+1} - 9x - 9 = 0. \end{cases}$

C2 Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4. Точка D — середина ребра AB, точка E лежит на ребре A_1C_1. Найдите объём призмы, если прямая ED образует с плоскостью CBA угол $60°$, а с плоскостью AA_1CC_1 угол β такой, что $\sin\beta = \frac{1}{4}$.

C3 Решите неравенство $\sqrt{3-x} + \sqrt{5x+9} - 2\sqrt{(3-x)(5x+9)} \leqslant 4x$.

C4 Две окружности с радиусами 4 и 6 имеют внутреннее касание. Найдите длину радиуса третьей окружности, касающейся первых двух и их общего диаметра.

C5 Решите неравенство $a^3x^4-4a^2x^2+x+4a-2\leqslant 0$ в зависимости от отрицательных значений параметра a.

C6 Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих условию

$$max\left\{\frac{(x+y)^2}{|x+y|},\ |x-2|\right\}=1.$$

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: 200.

Решение. Зарплату обозначим Z, оклад — O, надбавки — N. Из условий задачи получаем систему уравнений $\begin{cases} O+N=Z, \\ \frac{3}{2}O+N=1{,}4Z, \end{cases}$

из которой следует, что $O=0{,}8Z$, $N=0{,}2Z$. Если оставить прежний оклад и увеличить надбавки, то можно составить уравнение: $O+\alpha\cdot N=1{,}4Z$, где αN — увеличенные в α раз надбавки. Учитывая полученные ранее соотношения, имеем: $0{,}8Z+\alpha\cdot 0{,}2Z=1{,}4Z$, $0{,}2\alpha=0{,}6$, $\alpha=3$. Увеличение надбавок в три раза означает их увеличение на 200%.

B2 Ответ: 8,8.

Решение. При $x=3$ произведение $f(x-3)\cdot f(x-7)=$ $=f(0)\cdot f(-4)$. Найдём $f(0)$ и $f(-4)$ из условия задания $f(x)$: $f(0)=-\frac{2}{5}$ и $f(-4)=-22$. Тогда $f(0)\cdot f(-4)=\frac{44}{5}=8{,}8$.

B3 Ответ: 8. **Указание.** Представить $0=\log_5 1$.

B4 Ответ: 12.

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и ACD (см. рис. B4—7).

По теореме синусов будем иметь $\frac{AC}{\sin B}=2R$ и $\frac{BD}{\sin A}=2R$,

$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BD}{\sin A}$, $\frac{AC}{BD}=\frac{2}{3}$, $\frac{AC+BD}{BD}=\frac{5}{3}$, $\frac{20}{BD}=\frac{5}{3}$, $BD=12$.

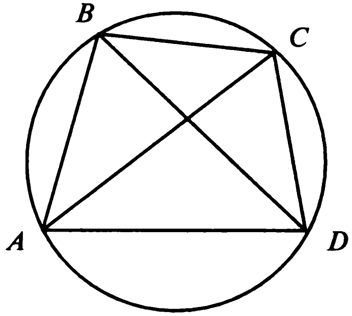

Рис. В4—7.

В5 Ответ: 720.

Решение. Первое место может получить любая из 10 команд. Следовательно, существует 10 способов распределения первого места. Пусть первое место закреплено за какой-либо командой. Тогда второе место может быть распределено среди оставшихся 9 команд. Аналогично рассуждая, делаем вывод, что третье место может быть распределено среди оставшихся 8 команд. Общее количество способов равно $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Действительно, при каждом выборе первого места существует 9 вариантов выбора второго места. Тогда первое и второе места можно распределить $10 \cdot 9 = 90$ способами. При каждом выборе первого и второго места выбор третьего места можно осуществить 8 способами, и общее число способов равно $90 \cdot 8 = 720$.

В6 Ответ: 10. **Указание.** См. пример 9.2.5.

В7 Ответ: 11.

Решение. Возведём в квадрат равенство: $\mathrm{tg}^2\alpha - 2\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = 9$. Так как $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$ для всех допустимых значений α, то $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = 11$.

В8 Ответ: 4. **Указание.** См. пример 8.1.18.

В9 Ответ: 52.

Решение. На рис. В9—7 изображена правильная пирамида.

$$AB = \sqrt{26},\ BO = \frac{\sqrt{52}}{2} = \sqrt{13},\ SO = \sqrt{49 - 13} = 6;$$

$$V_{\text{полн}} = \frac{1}{3}AB^2 \cdot SO = \frac{1}{3}26 \cdot 6 = 52.$$

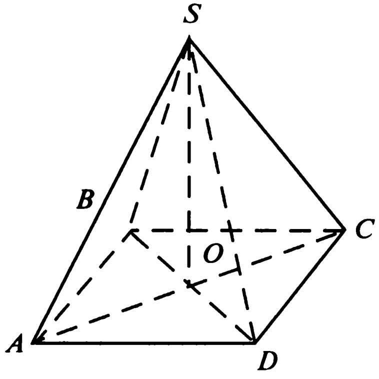

Рис. В9—7.

B10 Ответ: –6. **Указание.** См. пример 8.2.4.

B11 Ответ: 7. **Указание.** Учесть то, что $7^{\sqrt{x+3}} - 1 > 0$ при $x > -3$. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству вида $3^x - 243 < 0$ на множестве значений $x > -3$.

B12 Ответ: 15.

Решение. Пусть v — скорость работы первого экскаватора. Тогда $v + 1$ — скорость работы второго экскаватора. Из условий задачи следует, что $\frac{30}{v} - \frac{28}{v+1} = \frac{1}{4}$, $v^2 - 7v - 120 = 0$, $v_1 = 15$, $v_2 = -8$ — не подходит по смыслу задачи. Следовательно, скорость работы первого экскаватора равна 15 м/ч.

C1 Ответ: $(-1;2), (-1,5;1)$.

Решение. Преобразуем первое уравнение данной системы:

$$3 \cdot 3^{x+1}(y-2) = \sqrt{3}(y-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-2=0, \\ 3^{x+1} = 3^{-1/2}. \end{array}\right.$$

Если $y = 2$, то из второго уравнения исходной системы следует, что $18x = -18$, $x = -1$.

Если $3^{x+1} = 3^{-1/2}$, то $x = -1,5$, и из второго уравнения системы следует, что $3^{y+1} = 9$ и $y = 1$.

C2 Ответ: $24\sqrt{3}$.

Решение. Проводим $EE_1 \parallel CC_1$. Тогда $EE_1 \perp$ плоск. ABC и $EE_1 \perp E_1D$, $\angle EDE_1 = 60^\circ$ (см. рис. C2–7).

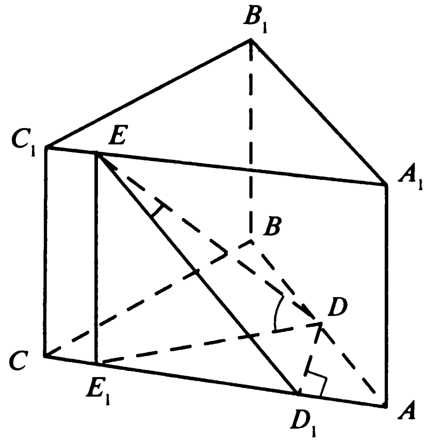

Рис. C2–7.

Из точки D опускаем перпендикуляр DD_1 на плоскость CC_1A_1A. Очевидно, что он лежит в плоскости CBA и $CA \perp DD_1$; $ED_1 \perp DD_1$; $\angle DED_1 = \beta$ есть угол наклона прямой ED к плоскости AA_1C_1C. Из ΔADD_1: $DD_1 = AD\sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Из ΔD_1DE: $ED = \frac{DD_1}{\sin\beta} = 4\sqrt{3}$;

из ΔDEE_1: $EE_1 = ED\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 6$.

Находим объём призмы: $V = S_{\text{осн}} \cdot EE_1 = \frac{1}{2}16\frac{\sqrt{3}}{2}6 = 24\sqrt{3}$.

C3 Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

Решение. Введём обозначения $Y = \sqrt{3-x}$ и $Z = \sqrt{5x+9}$ и перепишем неравенство через Y и Z. Так как $Y^2 + Z^2 = 4x+12$, $4x = Y^2 + Z^2 - 12$, то неравенство имеет вид

$$Y + Z - 2YZ \leqslant Y^2 + Z^2 - 12 \Leftrightarrow (Y+Z)^2 - (Y+Z) - 12 \geqslant 0.$$

Так как $Y+Z\geqslant 0$, то из неравенства следует, что $Y+Z\geqslant 4$. Возвращаясь к переменной x, получим неравенство, равносильное исходному, а именно: $\sqrt{3-x}+\sqrt{5x+9}\geqslant 4$.

Областью определения исходного неравенства является множество $-\frac{9}{5}\leqslant x\leqslant 3$. На этом множестве проведём преобразования равносильного неравенства, а именно возведём его в квадрат. В результате получим неравенство

$$\sqrt{(3-x)(5x+9)}\geqslant 2-2x.$$

Если $2-2x\geqslant 0$, $x\leqslant 1$, то последнее неравенство равносильно системе $\begin{cases} x\leqslant 1, \\ -\frac{9}{5}\leqslant x\leqslant 3, \\ 9x^2-14x-23\leqslant 0, \end{cases}$ $\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$

Если $x>1$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x>1, \\ -\frac{9}{5}\leqslant x\leqslant 3, \end{cases} \quad 1<x\leqslant 3.$$

Объединяя решения, получим $-1\leqslant x\leqslant 3$.

$\boxed{\text{C4}}$ Ответ: 1,92.

Решение. Пусть O_1 — центр окружности с радиусом 6; O_2 — центр окружности с радиусом 4 и O_3 — центр окружности, радиус которой обозначим r (см. рис. С4–7).

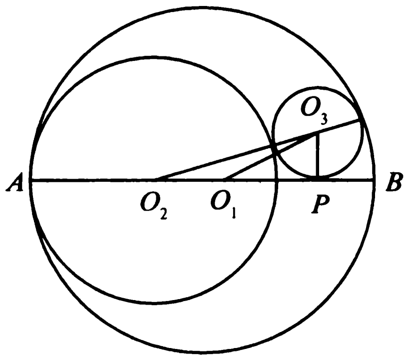

Рис. С4–7.

Из рис. С4–7 видно, что

$$O_3P = r;\ O_1O_3 = 6 - r;\ O_2O_1 = 6 - 4 = 2;\ O_2O_3 = 4 + r.$$

Из ΔO_1O_3P: $O_1P^2 = O_1O_3^2 - O_3P^2 = 36 - 12r$. С другой стороны, $O_1P = O_2P - O_2O_1 = O_2P - 2$. Из ΔO_2O_3P: $O_2P = \sqrt{O_2O_3^2 - O_3P^2} = \sqrt{(4+r)^2 - r^2} = \sqrt{16+8r}$.

Итак, $O_1P = \sqrt{16+8r} - 2$ и $O_1P^2 = 36 - 12r$, $16 + 8r + 4 - 4\sqrt{16+8r} = 36 - 12r$; $4\sqrt{16+8r} = 20r - 16$; $\sqrt{16+8r} = 5r - 4$, $r = \frac{48}{25} = 1{,}92$.

C5 Ответ: Если $-\frac{1}{8} < a < 0$, то $x \leqslant \frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a}$ и $x \geqslant \frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2a}$; если $a \leqslant -\frac{1}{8}$, то x — любое число.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$a^3x^4 - 4a^2x^2 + x + 4a - 2 = a(a^2x^4 - 4ax^2 + 4) + x - 2 = a(ax^2 - 2)^2 + x - 2 = a[(ax^2-2)^2 - x^2] + ax^2 + x - 2 = a(ax^2 + x - 2)(ax^2 - x - 2) + ax^2 + x - 2 = (ax^2 + x - 2)(a^2x^2 - ax - 2a + 1)$.

Запишем неравенство в виде

$$(a^2x^2 - ax - 2a + 1)(ax^2 + x - 2) \leqslant 0.$$

Так как $a^2x^2 - ax - 2a + 1 > 0$ при любом $a < 0$ и $x \in R$ (дискриминант трёхчлена $D = a^2 - 4a^2(1-2a) = a^2(8a-3) < 0$ при $a < 0$), то неравенство равносильно неравенству $ax^2 + x - 2 \leqslant 0$. Найдём его решения в зависимости от $a < 0$. Если дискриминант квадратного трёхчлена $D = 1 + 8a \leqslant 0$, т.е. если $a \leqslant -\frac{1}{8}$, то неравенство выполняется для любого x. В случае, когда $D > 0$, т.е. $-\frac{1}{8} < a < 0$, неравенство $ax^2 + x - 2 \leqslant 0$ представим в виде $a(x - x_1)(x - x_2) \leqslant 0$, $(x - x_1)(x - x_2) \geqslant 0$, где $x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2a}$, причём $x_2 > x_1$. Тогда решениями неравенства являются значения x, удовлетворяющие неравенствам $x > x_2$ и $x < x_1$. Следовательно, если $-\frac{1}{8} < a < 0$, то $x \leqslant \frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a}$ и $x \geqslant \frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2a}$; если $a \leqslant -\frac{1}{8}$, то x — любое число.

$\boxed{\textbf{С6}}$ Ответ: (1;0), (3;–2), (3;–4), (1;–2), (2;–1), (2;–3).

Указание. Примените геометрический метод решения.

Решение. Построим на плоскости $0XY$ множество точек, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют данному условию. Запишем это условие в виде $\begin{cases} max\{|x+y|,|x-2|\}=1, \\ x \neq -y. \end{cases}$

Возможны следующие варианты:

$$1)\begin{cases} |x+y|=1, \\ |x-2|\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1-x, \\ y=-1-x, \end{array}\right. \\ 1\leqslant x\leqslant 3; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} |x-2|=1, \\ -1\leqslant x+y\leqslant 1, \\ x\neq -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=1, \end{array}\right. \\ -1-x\leqslant y\leqslant 1-x, \\ y\neq -x. \end{cases}$$

Множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию, представляет параллелограмм $ABCD$, ограниченный прямыми $y=1-x$, $y=-1-x$, $x=3$, $x=1$. Заметим, что на сторонах, лежащих на прямых $x=1$ и $x=3$, исключены точки, в которых $x=-y$ (см. рис. С6–7). Это точки с координатами (1;–1) и (3;–3).

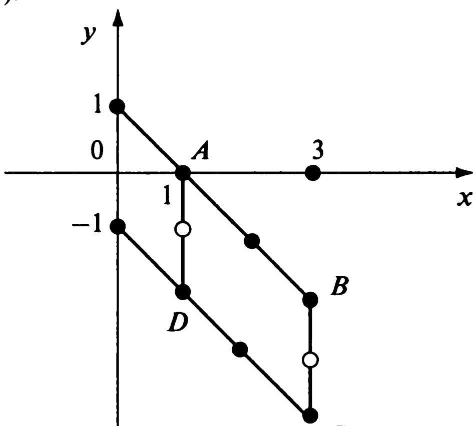

Рис. С6–7.

Вершины параллелограмма являются точками с целыми координатами $A(1;0)$, $B(3;-2)$, $C(3;-4)$, $D(1;-2)$. При $x=2$ получим две точки с целыми координатами, удовлетворяющими данному условию, а именно (2;–1) и (2;–3).

Вариант 8

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Найдите все натуральные числа N, которые при делении на 31 и 465 в остатке дают 17 и которые удовлетворяют условию $2\,000 < N < 3\,500$. В ответе укажите их сумму.

B2 Найдите значение суммы $f\left(\frac{2}{x}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)$ при $x=4$, если $f(x)=\frac{2x+2}{3x-2}$.

B3 Найдите корень уравнения $\log_{\frac{2x-3}{x+2}} 3 = 1$.

B4 Площадь S параллелограмма со сторонами $\sqrt{17}$ и 8 равна $8\sqrt{13}$. Найдите длину меньшей диагонали параллелограмма.

B5 Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

B6 Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если векторы $\vec{a}(x;-2;4)$, $\vec{b}(1;-1;z)$ и $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

B7 Вычислите $16\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{3}{4}$.

B8 Две точки движутся по оси $0X$ прямолинейно, по законам движения — $x_1(t)=t^3-7t$ и $x_2(t)=\frac{2t^3}{3}+1{,}5t^2+3t$ (x — координата в метрах, t — время в секундах). Через сколько секунд после начала движения скорость первой точки станет больше скорости второй?

B9 Длина образующей конуса равна 10, а площадь боковой поверхности равна 80π. Найдите объём конуса V. В ответе укажите значение $\frac{V}{\pi}$.

B10 Найдите количество целых значений a, при которых функция $y=-\frac{x^3}{3}+(a-3)\frac{x^2}{2}-9x+1$ убывает для всех значений x.

B11 Найдите сумму целых решений неравенства

$\left(\frac{\pi}{9}\right)^{x^2+4x}>\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2+4x}$, принадлежащих промежутку $[-1;4]$.

B12 Первый рабочий изготавливает 120 деталей на 2 часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 160 деталей, если, работая вместе, они изготавливают 50 деталей в час?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2\log_2 y-4\log_2 y-3x^2+12=0, \\ y^2\log_2 x-4\log_2 x+3y^2-12=0. \end{cases}$$

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если сторона основания равна 6.

C3 Решите неравенство

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}-2\sqrt{(x+3)(2x-1)}\geqslant 3x-4.$$

C4 В окружности с радиусом $R=2$ через точку D, взятую на диаметре под углом 45° к этому диаметру, проведена хорда AB. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная к этому диаметру. Найдите площадь треугольника ABC, если $AD:BD=1:2$.

C5 Решите уравнение $|x^2-|x||+|x^2+2|x|-3|=a$ в зависимости от значений параметра a.

C6 Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих условию

$$min\left\{\frac{1}{|x+3|},\frac{1}{|x-y|}\right\}=1.$$

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: 8 421.

Решение. Так как 465 делится на 31, то искомое число можно представить в виде $465\cdot l+17$. Тогда $2\,000<465l+17<3\,500$, $1\,983<465l<3\,483$, $5\leqslant l\leqslant 7$. Следовательно, указанному условию удовлетворяют три числа: $465\cdot 5+17=2\,342$; $465\cdot 6+17=2\,807$; $465\cdot 7+17=3\,272$. Их сумма равна 8 421.

B2 Ответ: –4,5. **Указание.** Подставьте $x = 4$ в искомое выражение.

B3 Ответ: –9. **Указание.** Примените определение логарифма.

B4 Ответ: 7.

Решение. По условию задачи $AB=\sqrt{17}$ и $AD=8$; BH — высота параллелограмма (см. рис.B4–8).

Тогда $BH=\frac{S}{AD}=\frac{8\sqrt{13}}{8}=\sqrt{13}.$ Из ΔABH следует, что $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=2.$ Тогда $HD=6.$ Из ΔHBD: $BD=\sqrt{BH^2+HD^2}=\sqrt{13+36}=7.$

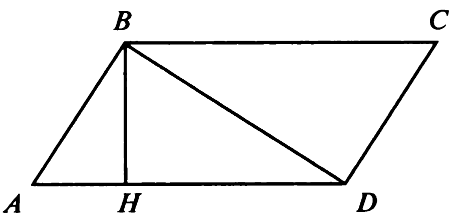

Рис. B4–8.

B5 Ответ: 45.

Решение. Применим метод «от противного», а именно найдём количество натуральных чисел среди первых 100, которые делятся хотя бы на 3, на 5 или на 7. Очевидно, что чисел, кратных 3, будет 33, кратных 5 — 20, кратных 7 — 14, т. е. $n_3 = 33$, $n_5 = 20$, $n_7 = 14$. Среди них будут числа, кратные 3 и 5, т. е. кратные 15, кратные 3 и 7, т. е. кратные 21, кратные 5 и 7, т. е. кратные 35. Эти числа учитываются дважды. Найдём их количество: $n_{15} = 6$, $n_{21} = 4$, $n_{35} = 55$. Тогда $n = n_3 + n_5 + n_7 - n_{15} - n_{21} - n_{35} = 55$.

Следовательно, количество искомых чисел равно 45.

B6 Ответ: 12. **Указание.** Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны. Из этого условия находим координату x для вектора $\vec{a}$ и координату z для вектора $\vec{b}$.

B7 Ответ: 5.

Решение. Преобразуем заданное выражение:

$$16\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2} = 8\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{2}\right)\right] = 8[\cos\alpha - \cos 2\alpha].$$

Вычислим $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{18}{16} - 1 = \frac{1}{8}$.

Тогда $16\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2} = 8\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) = 5$.

B8 Ответ: 5. **Указание.** Найдите $v_1(t)$ и $v_2(t)$ и решите неравенство $v_1(t) > v_2(t)$.

B9 Ответ: 128.

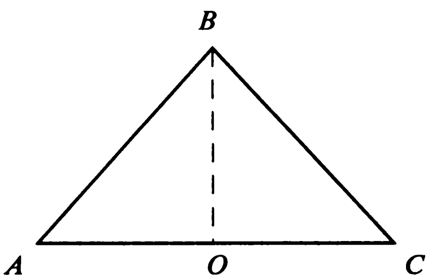

Рис. B9–8.

Решение. На рис. В9–8 изображено осевое сечение конуса: $AB = 10$, AO — радиус основания, BO — высота.

$$V = \frac{1}{3}\pi AO^2 \cdot OB;\ S_{\text{бок.}} = \pi AO \cdot AB,\ 80\pi = \pi AO \cdot 10,$$

$$AO = 8,\ BO = 6;\ V = \frac{1}{3}\pi \cdot 64 \cdot 6 = 128\pi.$$

B10 Ответ: 13. **Указание.** См. пример 8.2.4.

B11 Ответ: 10. **Указание.** Домножьте обе части неравенства на 9^{x^2+4x}.

B12 Ответ: 8. **Указание.** Пусть x дет./ч — производительность первого рабочего, y дет./ч — производительность второго. Тогда $x + y = 50$ и $\frac{120}{y} - \frac{120}{x} = 2$.

C1 Ответ: $(2;2), \left(\frac{1}{8};8\right)$.

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x^2 - 4)\log_2 y - 3(x^2 - 4) = 0,\ (x^2 - 4)(\log_2 y - 3) = 0.$$

$$\text{Тогда}\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ \log_2 y - 3 = 0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \pm 2, \\ y = 8. \end{array}\right.$$

Если $x = 2$, то из второго уравнения исходной системы следует, что $y^2 = 4$, $y_1 = 2$ и $y_2 = -2$.

Заметим, что $y_2 = -2$ не удовлетворяет исходной системе. Следовательно, если $x = 2$, то $y = 2$. Значение $x = -2$ также не удовлетворяет системе. Если $y = 8$, то из второго уравнения исходной системы следует, что $\log_2 x = -3$ и $x = \frac{1}{8}$.

C2 Ответ: $36\sqrt{2}$.

Решение. Проведём BM и DM, перпендикулярные ребру SC (см. рис. C2–8).

Тогда $\angle DMB = 120°$ и $OM \perp SC$. Чтобы найти площадь боковой поверхности пирамиды, нужно найти длину SK — апофемы боковой грани. $OM \perp DB$ (теорема о трёх перпендикулярах). Из ΔOBM: $OM = OB\operatorname{ctg}60° = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$.

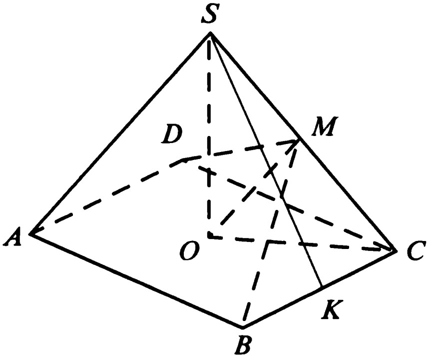

Рис. С2–8.

Из ΔOMC: $MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{18-6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

В прямоугольном треугольнике OSC OM — перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу. Поэтому

$$OM^2 = SM \cdot MC,\ SM = \frac{OM^2}{MC} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3},\ SC = SM + MC = 3\sqrt{3};$$

$$SK = \sqrt{SC^2 - KC^2} = 3\sqrt{2};\ S_{\text{бок}} = 36\sqrt{2}.$$

$\boxed{\text{C3}}$ Ответ: $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. Введём обозначения $\sqrt{x+3} = Y \geqslant 0, \sqrt{2x-1} = Z \geqslant 0$ и перепишем исходное неравенство через Y и Z:

$$Y + Z - 2YZ \geqslant Y^2 + Z^2 - 6 \Leftrightarrow (Y+Z)^2 - (Y+Z) - 6 \leqslant 0,\ 0 \leqslant Y + Z \leqslant 3.$$

Возвращаясь к переменной x, запишем неравенство, равносильное данному, а именно $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} \leqslant 3$.

Возводим обе части неравенства в квадрат на множестве $x \geqslant \frac{1}{2}$:

$$3x + 2 + 2\sqrt{(x+3)(2x-1)} \leqslant 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(2x-1)} \leqslant 7 - 3x.$$

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 7 - 3x \geqslant 0, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \\ 4(x+3)(2x-1) \leqslant (7-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant \frac{7}{3}, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x^2 - 62x + 61 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Тогда } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1.$$

С4 Ответ: 4,8.

Решение. Так как диаметр $MN \perp BC$ (см. рис. С4–8), то $BK = KC$.

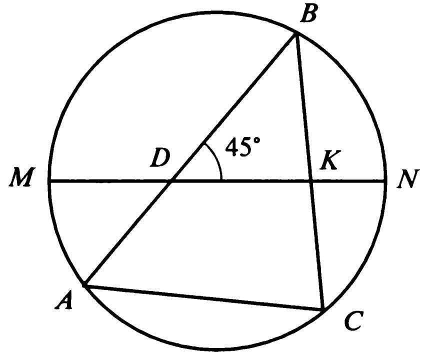

Рис. С4–8.

Обозначим $AD = x$, тогда $DB = 2x$, $BC = 2x\sqrt{2}$ и $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = 3x^2$.

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$.

Вычислим AC по теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B} = x\sqrt{5}$$

и $S_{\Delta ABC} = \frac{3x \cdot 2x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{5}}{8} = \frac{3x^3\sqrt{10}}{4}$. Приравняем значения $S_{\Delta ABC}$, вычисленные двумя способами: $3x^2 = \frac{3x^3\sqrt{10}}{4}$, получим $x = \frac{4}{\sqrt{10}}$. Тогда $S_{\Delta ABC} = 3 \cdot \frac{16}{10} = 4,8$.

С5 Ответ: Если $a < 0$, то $x \in \varnothing$; если $a = 0$, то $x_{1,2} = \pm 1$; если $0 < a < 3$, то $x_{1,2,3,4} = \frac{\mp 1 \pm \sqrt{25 \pm 8a}}{4}$; если $a = 3$, то $x_{1,3} = \frac{\pm 1 \mp \sqrt{25 + 8a}}{4}$, $x_2 = 0$; если $a > 3$, то $x_{1,2} = \frac{\pm 1 \mp \sqrt{25 + 8a}}{4}$.

Решение. Для решения используем графический метод.

Рассмотрим функцию $y = |x^2 - |x|| + |x^2 + 2|x| - 3|$. Это чётная функция, и её график симметричен относительно оси $0Y$.

В области $x \geqslant 0$ $y = |x^2 - x| + |x^2 + 2x - 3|$.

Если $0 \leqslant x < 1$, то $y = -x^2 + x - x^2 - 2x + 3 = 3 - x - 2x^2$.

Если $x \geqslant 1$, то $y = x^2 - x + x^2 + 2x - 3 = 2x^2 + x - 3$.

В области $x < 0$ $y = |x^2 + x| + |x^2 - 2x - 3|$.

Если $-1 \leqslant x < 0$, то $y = -x^2 - x - x^2 + 2x + 3 = -2x^2 + x + 3$.

Если $x < -1$, то $y = x^2 + x + x^2 - 2x - 3 = 2x^2 - x - 3$.

Построим график функции $y_1 = |x^2 - |x|| + |x^2 + 2|x| - 3|$ (см. рис. С5–8).

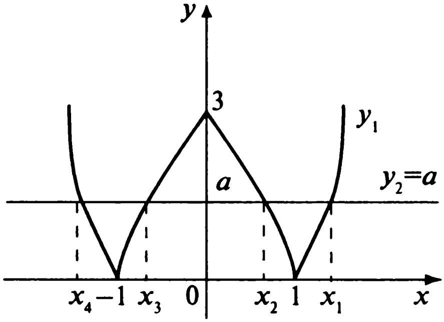

Рис. С5–8.

Если прямая $y = a$ имеет общие точки с графиком функции y_1, то абсциссы точек пересечения являются решениями исходного уравнения.

Очевидно, что при $a < 0$ общих точек нет. Следовательно, уравнение не имеет решения.

Если $a = 0$, то $x = \pm 1$ — два решения.

Если $0 < a < 3$, то имеется четыре точки пересечения. Следовательно, уравнение имеет 4 корня. Найдём их из решения следующих уравнений:

1) $2x^2 + x - 3 = a$, x_1 — больший корень, $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{25 + 8a}}{4}$;

2) $-2x^2 - x + 3 = a$, x_2 — больший корень, $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{25 - 8a}}{4}$;

3) $-2x^2 + x + 3 = a$, x_3 — меньший корень, $x_3 = \dfrac{1 - \sqrt{25 - 8a}}{4}$;

4) $2x^2 - x - 3 = a$, x_4 — меньший корень, $x_4 = \dfrac{1 - \sqrt{25 + 8a}}{4}$.

Если $a = 3$, то исходное уравнение имеет три решения, а именно $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{25 + 8a}}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \dfrac{1 - \sqrt{25 + 8a}}{4}$.

Если $a>3$, то уравнение имеет два решения $x_{1,2}=\dfrac{\pm 1\mp\sqrt{25+8a}}{4}$.

$\boxed{\text{C6}}$ Ответ: $(-2;-1),(-2;-3),(-4;-5),(-4;-3)$. **Указание.** Примените геометрическую интерпретацию к решению задачи.

Решение. Так как условие $min\left\{\dfrac{1}{|x+3|},\dfrac{1}{|x-y|}\right\}=1$ равносильно условию $\begin{cases} max\{|x+3|,|x-y|\}=1, \\ x\neq -3, x\neq y\end{cases}$, то на плоскости OXY построим множество точек, удовлетворяющих последнему условию.

Рассмотрим следующие варианты:

$$1)\begin{cases}|x+3|=1,\\|x-y|\leqslant 1,\\x\neq y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2,\\x=-4,\end{array}\right.\\x-1\leqslant y\leqslant x+1,\\x\neq y;\end{cases}\quad 2)\begin{cases}|x+3|\leqslant 1,\\|x-y|=1,\\x\neq -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=x+1,\\y=x-1,\end{array}\right.\\-4\leqslant x\leqslant -2,\\x\neq -3.\end{cases}$$

Множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному условию, представляет параллелограмм $ABCD$, ограниченный прямыми $x=-2$, $x=-4$, $y=x+1$, $y=x-1$. Из этого множества исключаются точки с абсциссой -3, а также точки, для которых $x=y$ (см. рис. С6–8).

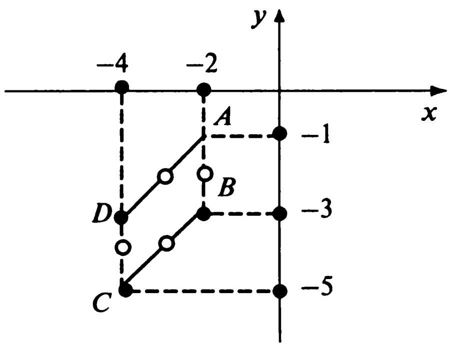

Рис. С6–8.

Это точки с координатами $(-3;-2)$, $(-3;-4)$, $(-2;-2)$, $(-4;-4)$. Условию задачи удовлетворяют точки $A(-2;-1)$, $B(-2;-3)$, $C(-4;-5)$, $D(-4;-3)$.

Вариант 9

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Скорость шлюпки при движении по реке против течения составляет $\frac{2}{23}$ от скорости шлюпки по течению. На сколько процентов скорость течения меньше скорости шлюпки в стоячей воде?

B2 График функции $y=\frac{ax+b}{mx+n}$ получен из графика функции $y=\frac{4}{3x}$ сдвигом последнего на одну единицу влево и на две единицы вверх. Найдите $\frac{m+n}{a+b}$.

B3 Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}$$

B4 В равнобедренном треугольнике $ABC(AB=BC)$ боковая сторона делится точкой касания вписанной окружности на отрезки с длинами 8 и 5, считая от вершины B. Найдите площадь треугольника.

B5 Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

B6 Найдите площадь фигуры, координаты всех точек которой удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y\geqslant|x+2|-1, \\ y\leqslant 8-|x-1|. \end{cases}$

B7 Вычислите $\mathrm{tg}\alpha$, если выполняется равенство

$$20\mathrm{tg}\alpha + 5\mathrm{tg}\alpha\cos\alpha - 3\cos\alpha - 12 = 0.$$

B8 Прямая $y=-2x-12$ касается параболы $y=x^2+bx+c$ в точке $M(-2;-8)$. Найдите сумму $b+c$.

B9 Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно $2\sqrt{17}$, а площадь основания равна 64. Найдите объём пирамиды $V_{\text{пир.}}$.

B10 Найдите количество точек экстремума функции

$$y=(x-2)^2-4|x-2|-12.$$

B11 Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{6x^2-9x-2}=2x-1$.

B12 В цехе происходит соревнование между тремя токарями. За определённый период времени первый и второй токари обработали в 4 раза больше деталей, чем третий, а первый и третий — в 3 раза больше, чем второй. Какой из токарей победил в соревновании? В ответе укажите его номер.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\left(\log_2 3\right)^{\sqrt{\frac{x^3+x^2-2x}{3x^2-2x-1}}}=(\log_9 4)^{\sqrt{x^2+x-2}}$.

C2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB=4$, боковое ребро $AA_1=3$. Найдите расстояние от вершины C_1 до плоскости ABD, где D — середина ребра A_1C_1.

C3 Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_7 x+3x}<\dfrac{1}{\log_7 x+18x}$.

C4 Треугольник со сторонами 26, 28 и 30 разделён на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными к большей стороне. Найдите величину наибольшего из отрезков, на которые основания перпендикуляров делят большую сторону треугольника.

C5 Найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ |x-2|+y=6 \end{cases}$ в зависимости от значений параметра a.

C6 Решите в целых числах уравнение $2x^2-y^2+xy+5x-y=0$.

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: 16.

Решение. Пусть V — скорость лодки в стоячей воде; x — скорость течения реки. Тогда $V-x=\frac{2}{23}(x+V)$, $x=\frac{21}{25}V$, что составляет 84% от скорости лодки в стоячей воде.

B2 Ответ: 0,375. **Указание.** Воспользуйтесь правилами преобразования графиков функций (см. раздел 5.5.2).

B3 Ответ: 3. **Указание.** Воспользуйтесь свойством показательной функции с основанием $0<a<1$.

B4 Ответ: 60.

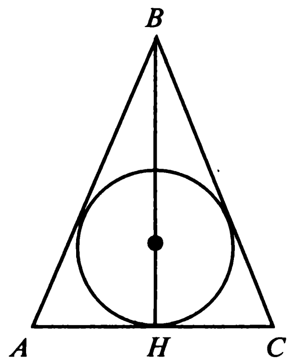

Рис. B4—9.

Решение. Чтобы найти площадь ΔABC, нужно найти высоту BH и основание AC. По условию задачи $BK=8$ и $KC=5$ (см. рис. B4–9).

По свойству касательных, проведённых из одной точки к окружности, $HC=KC=5$. Тогда $BH=\sqrt{BC^2-HC^2}=$ $=\sqrt{169-25}=12$ и $S_{\Delta ABC}=BH\cdot HC=12\cdot 5=60$.

B5 Ответ: 768.

Решение. На шахматной доске 32 белых и 32 чёрных квадрата. Выбор белого квадрата можно осуществить 32 способами. Если выбор белого квадрата сделан, то чёрный квадрат можно выбрать 32 – 8 = 24 способами, так как в выборе не участвуют 8 чёрных квадратов, лежащих на одной горизонтали и одной вертикали с выбранным белым квадратом. Следовательно, общее число способов равно $32\cdot 24=768$.

B6 Ответ: 36.

Решение. Строим графики функций $y=|x+2|-1$ и $y=8-|x-1|$. Очевидно, что графики функций, пересекаясь, образуют прямоугольник $ABCD$, площадь которого требуется найти (см. рис. B6–9).

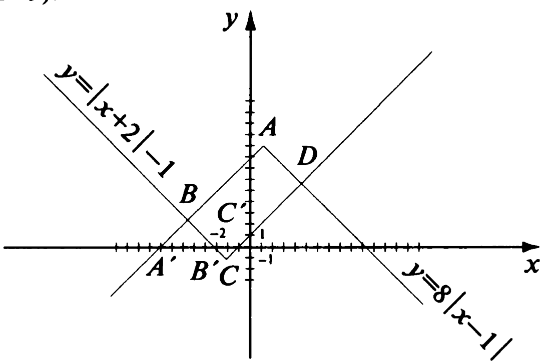

Рис. B6–9.

Координаты точек $A(1;8)$ и $C(-2;-1)$ известны из построения графиков. Находим координаты B и D, для чего решим уравнение

$$|x+2|-1=8-|x-1|,\ x_1=-5,\ x_2=4.$$

Тогда $y_1=2$ и $y_2=5$, т.е. $B(-5;2)$ и $D(4;5)$.

Зная координаты точек, находим $BC=3\sqrt{2}$ и $CD=6\sqrt{2}$ по формуле расстояния между двумя точками. $S_{ABCD}=BC\cdot CD=36$.

B7 Ответ: 0,6. **Указание.** Исходное равенство разложите на множители.

B8 Ответ: –6. **Указание.** См. пример 8.1.14.

B9 Ответ: 128.

Решение. На рис. B9–9 изображена правильная четырёхугольная пирамида, основанием которой является квадрат со стороной 8, и боковое ребро $AS = 2\sqrt{17}$.

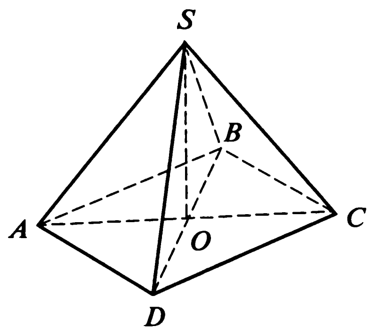

Рис. B9—9.

Тогда $AO = 4\sqrt{2}$. Из ΔAOS: $SO = 6$, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}AB^2 \cdot SO = \frac{1}{3}64 \cdot 6 = 128$.

B10 Ответ: 3. **Указание.** См. пример 10.1.63.

Решение. Пусть $x > 2$, тогда $y = (x-2)^2 - 4(x-2) - 12 = x^2 - 8x$, $y' = 2x - 8$, и $x_1 = 4$ — критическая точка, а именно точка минимума. Пусть $x < 2$, тогда $y = (x-2)^2 + 4(x-2) - 12 = x^2 - 16$, $y' = 2x$, и $x_2 = 0$ — критическая точка, а именно точка минимума. Точка $x = 2$ — точка максимума заданной функции. В этой точке производная не существует, но заданная функция определена и равна -12. Слева от точки $x = 2$ производная $y' = 2x$ принимает положительные значения, а справа $y' = 2x - 8$ принимает отрицательные значения. Следовательно, $x = 2$ — точка максимума.

B11 Ответ: 3. **Указание.** Возведите в квадрат обе части уравнения. Проверка полученных решений обязательна.

B12 Ответ: 1.

Решение. Пусть первый токарь обработал x деталей, второй — y, третий — z. Тогда по условию задачи $\begin{cases} x+y=4z, \\ x+z=3y, \end{cases}$ $y=\frac{5}{4}z$, $x=4z-\frac{5}{4}z=\frac{11}{4}z$. Следовательно, первый токарь обработал наибольшее число деталей.

C1 Ответ: –2.

Решение. Преобразуем правую часть данного уравнения:

$$(\log_9 4)^{\sqrt{x^2+x-2}}=(\log_3 2)^{\sqrt{x^2+x-2}}=\frac{1}{(\log_2 3)^{\sqrt{x^2+x-2}}}=(\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+x-2}}.$$

Тогда уравнение принимает следующий вид:

$$(\log_2 3)^{\sqrt{\frac{x^3+x^2-2x}{3x^2-2x-1}}}=(\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+x-2}},\quad \sqrt{\frac{x^3+x^2-2x}{3x^2-2x-1}}=-\sqrt{x^2+x-2}.$$

Левая часть последнего уравнения неотрицательна, а правая — неположительна в области определения уравнения. Следовательно, равенство возможно только в случае, когда обе части этого уравнения равны нулю, т.е. имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3+x^2-2x}{3x^2-2x-1}=0, \\ x^2+x-2=0, \end{cases} \begin{cases} x^3+x^2-2x=0, \\ x^2+x-2=0, \\ 3x^2-2x-1\neq 0. \end{cases} \text{ Тогда } x=-2.$$

C2 Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение. Сделаем дополнительные построения: проведём $DD_1 \parallel AB$; DD_1 — средняя линия $\Delta C_1A_1B_1$ (см. рис. C2–9).

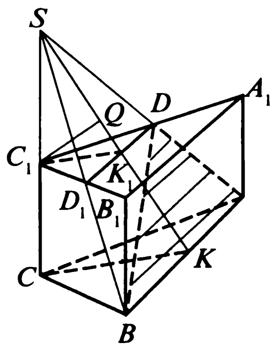

Рис. C2–9.

Прямые BD_1 и AD пересекутся, очевидно, в одной точке S с ребром CC_1. ΔBSA — равнобедренный, его плоскость совпадает с плоскостью ABD. Опустим перпендикуляр C_1Q из точки C_1 на плоскость BSA. Очевидно, что точка Q лежит на медиане SK и длина этого перпендикуляра есть расстояние от точки C_1 до плоскости ABD. Из ΔABC: $CK = 2\sqrt{3}$; из ΔC_1DD_1: $C_1K_1 = \sqrt{3}$ — средняя линия ΔSCK. Тогда $SC_1 = 3, SK_1 = 2\sqrt{3}$. Из подобия $\Delta C_1SK_1 \sim \Delta C_1QK_1$: $\dfrac{C_1Q}{C_1S} = \dfrac{C_1K_1}{SK_1}$, $C_1Q = \dfrac{C_1S \cdot C_1K_1}{SK_1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2}$.

C3 Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Решение. Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{1}{\log_3 x + 3x} < \frac{1}{\log_3 x + 18x} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x + 3x} - \frac{1}{\log_3 x + 18x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(\log_3 x + 3x)(\log_3 x + 18x)} < 0.$$

Так как $x > 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству $(\log_3 x + 3x)(\log_3 x + 18x) < 0$.

Рассмотрим функции $y_1 = \log_3 x + 3x$ и $y_2 = \log_3 x + 18x$. При $x > 0$ обе функции монотонно возрастают.

Функция $y_1 = \log_3 x + 3x$ обращается в нуль при $x = \dfrac{1}{3}$, $y_1 < 0$ при $0 < x < \dfrac{1}{3}$ и $y_1 > 0$ при $x > \dfrac{1}{3}$.

Функция $y_2 = \log_3 x + 18x$ обращается в нуль при $x = \dfrac{1}{9}$, $y_2 < 0$ при $0 < x < \dfrac{1}{9}$ и $y_2 > 0$ при $x > \dfrac{1}{9}$.

Следовательно, на интервале $\left(\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{3}\right)$ y_1 и y_2 имеют разные знаки и этот интервал является решением исходного неравенства.

C4 Ответ: $2\sqrt{42}$.

Решение. Найдём площадь треугольника ABC (см. рис. С4–9) по теореме Герона: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 14} = 336$.

Проведём высоту BH и выясним, как должны располагаться перпендикуляры к стороне $AC = 30$, чтобы они разделили треугольник ABC на равновеликие части:

$$BH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = 22{,}4; \quad AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{26^2 - 22{,}4^2} = 13{,}2.$$

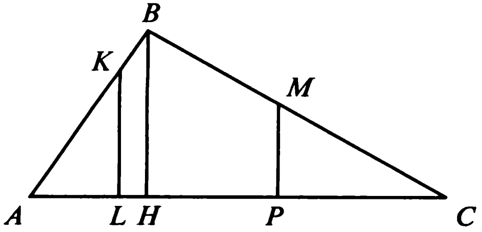

Рис. C4–9.

$S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = 147{,}84$. Так как $\frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = 112$ и $112 < S_{\Delta ABH} = 147{,}84 < 224$, то перпендикуляры KL и MP к стороне AC расположены по разные стороны от BH. Так как $\Delta AKL \sim \Delta ABH$, то

$$\frac{AL^2}{AH^2} = \frac{S_{\Delta AKL}}{S_{\Delta ABH}} \text{ и } AL = \sqrt{\frac{112 \cdot (13{,}2)^2}{147{,}84}} = 2\sqrt{33}.$$

Аналогично из подобия $\Delta HBC \sim \Delta PMC$ следует $\frac{PC^2}{HC^2} = \frac{S_{\Delta PMC}}{S_{\Delta HBC}}$,

где $S_{\Delta HBC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABH} = 188{,}16$. $PC = \sqrt{\frac{112 \cdot (16{,}8)^2}{188{,}16}} = 2\sqrt{42}$.

Сравнивая значения $AL = 2\sqrt{33}$, $PC = 2\sqrt{42}$ и $LP = 30 - 2(\sqrt{33} + \sqrt{42})$, получаем, что наибольшим отрезком является отрезок PC.

C5 Ответ: Если $a < 8$, то решений нет; если $a = 8$, то одно решение; если $8 < a < 32$ и $a > 40$, то два решения; если $a = 32$ и $a = 40$, то три решения; если $32 < a < 40$, то четыре решения.

Решение. Если $a < 0$, то система не имеет решения.

Если $a = 0$, то первому уравнению удовлетворяет только $x = 0$, $y = 0$, при которых не выполняется второе уравнение.

Если $a > 0$, то первое уравнение определяет окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в начале координат. Второе уравнение определяет на плоскости $0XY$ «угол» с вершиной в точке $A(2;6)$ и лучами AB и AC, параллельными биссектрисам координатных углов (см. рис. C5–9).

Если $\sqrt{a} < OD = \sqrt{8}$, т.е. $a < 8$, то окружность и «угол» не имеют общих точек, а значит, система не имеет решения.

Если $\sqrt{a} = OD = \sqrt{8}$, т.е. $a = 8$, то окружность и «угол» имеют одну общую точку, а именно D, а значит, система имеет единственное решение.

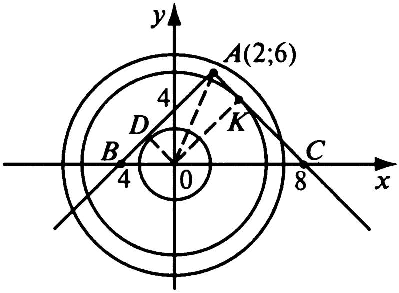

Рис. С5—9.

Если $\sqrt{8} < \sqrt{a} < OK = \sqrt{32}$, т.е. $8 < a < 32$, то окружность пересекает луч AB в двух точках, а значит, система имеет два решения.

Если $\sqrt{a} = \sqrt{32}$, т.е. $a = 32$, то окружность и луч имеют три общих точки (к двум точкам на луче AB добавляется точка K), а значит, система имеет три решения.

Если $\sqrt{32} < \sqrt{a} < OA = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$, т.е. $32 < a < 40$, то окружность пересекает луч AB в двух точках и луч AC в двух точках. Следовательно, система имеет четыре решения.

Если $\sqrt{a} > \sqrt{40}$, т.е. $a > 40$, то окружность пересекает каждый луч только один раз, а значит, система имеет два решения.

$\boxed{\text{С6}}$ Ответ: $(0;0), (0;-1), (-2;-1), (-2;-2)$. **Указание.** Разложите левую часть уравнения на множители.

Решение. Представим разложение уравнения на множители в виде $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = c_1c_2$, где коэффициенты разложения: a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 необходимо найти из условия равенства коэффициентов при одинаковых степенях x и y левой части заданного уравнения и его разложения на множители. Таким образом, должны выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} a_1a_2 = 2, \\ b_1b_2 = -1, \\ a_1b_2 + b_1a_2 = 1, \\ a_1c_2 + a_2c_1 = 5, \\ c_2b_1 + c_1b_2 = -1. \end{cases}$$

Эту систему решаем в целых числах. Рассмотрим первые три уравнения:

$$\begin{cases} a_1a_2 = 2, \\ b_1b_2 = -1, \\ a_1b_2 + b_1a_2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что:

1) $b_1 = 1$, $b_2 = -1$; 2) $b_1 = -1$, $b_2 = 1$.

Если $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, то из системы

$$\begin{cases} a_1a_2 = 2, \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 1, \end{cases} \begin{cases} a_1a_2 = 2, \\ -a_1 + a_2 = 1, \end{cases} \left[\begin{array}{l} a_1 = 1,\ a_2 = 2, \\ a_1 = -2, a_2 = -1. \end{array}\right.$$

Коэффициенты c_1 и c_2 найдём из системы

$$\begin{cases} a_1c_2 + a_2c_1 = 5, \\ b_1c_2 + b_2c_1 = -1. \end{cases} \text{Тогда} \left[\begin{array}{l} c_1 = 2,\ c_2 = 1, \\ c_1 = -1,\ c_2 = -2. \end{array}\right.$$

Таким образом получены два набора коэффициентов разложения:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b_1 = 1,\ b_2 = -1,\ c_1 = 2,\ c_2 = 1;$$
$$a_1 = -2,\ a_2 = -1,\ b_1 = 1,\ b_2 = -1,\ c_1 = -1,\ c_2 = -2.$$

Этим наборам соответствует одно и то же разложение исходного уравнения, а именно $(x + y + 2)(2x - y + 1) = 2$. Заметим, что случай

2) $b_1 = -1, b_2 = 1$ приводит исходное уравнение к такому же виду.

Далее запишем уравнение в виде $(x + y + 2)(2x - y + 1) = 2$. Каждый множитель этого уравнения должен принимать целые значения, так как x и y — целые числа.

Рассмотрим все возможные варианты:

$$1) \begin{cases} x + y + 2 = 2, \\ 2x - y + 1 = 1, \end{cases} \quad x = y = 0;$$

$$2) \begin{cases} x + y + 2 = -2, \\ 2x - y + 1 = -1, \end{cases} \quad x = y = -2;$$

$$3) \begin{cases} x + y + 2 = -1, \\ 2x - y + 1 = -2, \end{cases} \quad x = -2,\ y = -1;$$

$$4) \begin{cases} x + y + 2 = 1, \\ 2x - y + 1 = 2, \end{cases} \quad x = 0, y = -1.$$

Вариант 10

Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1—B12) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 Пенсионер, кроме государственной пенсии, получает ежемесячную помощь от предприятия, на котором он работал. Если бы помощь от предприятия увеличилась вдвое, то общая сумма денег, получаемая пенсионером ежемесячно, увеличилась бы на 25%. На сколько процентов увеличилась бы ежемесячная сумма, если бы вдвое увеличилась государственная пенсия?

B2 Найдите наименьший положительный период функции

$$y = \sin 3\pi x + \cos^2 \frac{x}{3}\pi.$$

B3 Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2-4x-8} < \frac{27}{64}.$$

B4 В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 13, а медиана, проведённая к боковой стороне, равна $\frac{1}{2}\sqrt{369}$. Найдите длину медианы, проведённой к основанию.

B5 Пусть V, R и G соответственно число вершин, рёбер и граней призмы. Найдите значение $V - R + G$, если $V = 14$.

B6 Даны четыре точки $A(3;4)$, $B(-1;0)$, $C(1;-2)$, $D(0;-3)$. Найдите скалярное произведение $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$.

B7 Вычислите $\sin\alpha$, если $3\cos^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha = 0$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

B8 Прямая $y = 6x - 7$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке $M(2;5)$. Найдите сумму $b + c$.

B9 Прямоугольный параллелепипед, основанием которого является прямоугольник со сторонами 2 и 3, вписан в сферу радиусом 3,5. Найдите полную поверхность параллелепипеда $S_{\text{полн.}}$.

B10 Найдите количество точек экстремума функции

$$y = 2^{\log_2(5-x^2-4x)} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x.$$

B11 Найдите произведение корней уравнения $\frac{4x^2 - 64}{|x| + 4} = 3|x|$.

B12 На угольной шахте сначала работали два участка, а после вступления в строй третьего участка производительность шахты возросла в 2 раза. Сколько процентов составляет производительность третьего участка от производительности второго, если известно, что за три месяца первый и третий участки выдают угля столько же, сколько второй за полгода?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1—С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите уравнение $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{\sqrt{x^2-4x+3}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{0,5\sqrt{(x-1)\log_2(x-2)}}$.

C2 В треугольной пирамиде $ABCS$ плоские углы ASC и BSC при вершине S равны. Двугранный угол при ребре SC равен 60°. Найдите $\cos\angle ASB$, если известно, что $\cos\angle ASC = \frac{3}{5}$.

C3 Решите неравенство $\log_x(x^3+1)\log_{x+1}x \geqslant 2$.

C4 В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, основания которых соединены между собой. Найдите отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC, если известно, что $\cos\angle A = \frac{1}{2}$, а $\cos\angle B = \frac{3}{5}$.

C5 Найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ |y-a|-x=5 \end{cases}$ в зависимости от значений параметра a.

C6 Решите в целых числах уравнение

$$x^3-2x^2y+x^2-4y^2+2xy+2x-2y=0.$$

Ответы, указания, решения

B1 Ответ: 75.

Решение. Пусть x — государственная пенсия; y — помощь предприятия. Из условий задачи имеем: $x+2y=1{,}25(x+y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=3y$. Если увеличить государственную пенсию в два раза, то получим уравнение $2x+y=k(x+y)$. Учитывая, что $x=3y$, определяем $k=\frac{7}{4}$. Выражение $\frac{7}{4}(x+y)$ означает, что ежемесячно пенсионер будет получать 175% от предыдущей суммы.

B2 Ответ: 6. **Указание.** Запишите функцию в виде $y=\frac{1}{2}+\sin 3\pi x+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{3}$ (далее см. пример 5.4.5).

B3 Ответ: 0. **Указание.** Воспользуйтесь свойством показательной функции с основанием $a>1$.

B4 Ответ: 12.

Решение. По условию задачи $BK=KC=6{,}5$ (см. рис. B4–10).

BH — медиана (она же высота), проведённая к основанию. $KL \parallel BH$. KL — средняя линия ΔHBC, и потому $HL=LC=\frac{1}{2}AH$.

Из ΔKLC и ΔAKL: $KL^2 = KC^2 - LC^2 = AK^2 - 9LC^2$ или $\frac{169}{4} - LC^2 = \frac{369}{4} - 9LC^2$, $LC^2 = \frac{25}{4}$. Тогда $KL^2 = \frac{169}{4} - \frac{25}{4} = \frac{144}{4}$ и $KL = 6$; $BH = 2KL = 12$.

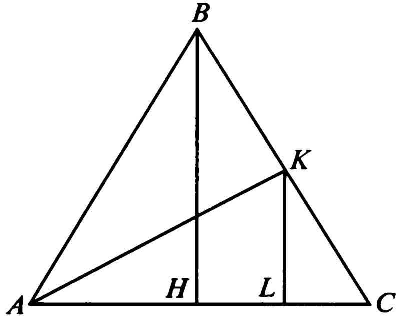

Рис. В4—10.

B5 Ответ: 2.

Решение. Призма — это многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы. Из этого определения следует, что число вершин у призмы равно $2n$, где n — число рёбер основания. В нашем случае в основании лежит семиугольник, и поэтому $R = 21$; $G = 9$.

B6 Ответ: –30. **Указание.** Сначала найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AB}$ (см. пример 9.1.9). Затем вычислите координаты векторов $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$.

B7 Ответ: –0,6.

Решение. Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha \neq 0$. Следовательно, исходное равенство равносильно следующему: $3\cos\alpha = 4\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}75$. Так как $\sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{9}{25}$, то $\sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$. Но если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha$ принимает отрицательные значения. Тогда $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

B8 Ответ: −1. **Указание.** См. пример 8.1.14.

B9 Ответ: 72.

Решение. Проведём сечение сферы плоскостью, проходящей через диагонали верхнего и нижнего оснований параллелепипеда (см. рис. B9–10).

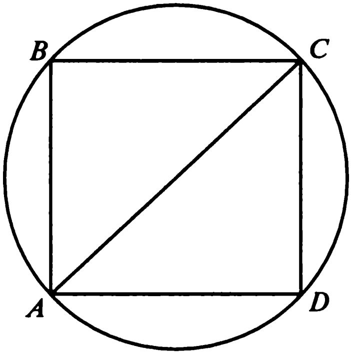

Рис. B9–10.

CD — боковое ребро параллелепипеда, AD — диагональ основания, $AC = 7$ — диагональ параллелепипеда, равная диаметру сферы. Тогда $AD = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $CD = 6$. Найдём боковую поверхность параллелепипеда: $S_{\text{бок.}} = P \cdot CD$, где $P = 10$ — периметр основания параллелепипеда. Тогда $S_{\text{бок.}} = 60$, площадь основания параллелепипеда $S_{\text{осн.}} = 6$ и $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 60 + 12 = 72$.

B10 Ответ: 1. **Указание.** См. пример 10.1.64.

Решение. Областью определения данной функции являются те значения x, при которых выполняется неравенство $5 - x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 < 0$. Тогда $-5 < x < 1$. На множестве $x \in (-5;1)$ функция записывается в виде $y = 5 - x^2 - 4x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 5$. Найдём критические точки этой функции $y' = x^2 - x - 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Точка $x_2 = 3$ не принадлежит области определения исходной функции. Следовательно, данная функция имеет только одну критическую точку $x_1 = -2$, при переходе через которую производная меняет знак с плюса на «минус». Следовательно, $x=-2$ — точка максимума.

B11 Ответ: -256. **Указание.** Введите новую переменную $|x|=t\geqslant 0$.

B12 Ответ: 150.

Решение. Пусть x, y, z — производительность первого, второго и третьего участков соответственно. Тогда из условия задачи следует $\begin{cases} x+y+z=2(x+y) \\ 3(x+z)=6y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+y, \\ z=2y-x \end{cases}$ и $z=\frac{3}{2}y$. Следовательно, производительность третьего участка составляет 150% от производительности второго.

C1 Ответ: 3.

Решение. Представим уравнение в виде

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{\sqrt{x^2-4x+3}}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{-\sqrt{(x-1)\log_2(x-2)}},\quad \sqrt{x^2-4x+3}=-\sqrt{(x-1)\log_2(x-2)}.$$

Выполнение равенства возможно только при обращении в нуль обеих частей последнего уравнения. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе условий

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-4x+3}=0, \\ \sqrt{(x-1)\log_2(x-2)}=0, \\ x>2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+3=0, \\ (x-1)\log_2(x-2)=0 \\ x>2. \end{cases} \text{ Тогда } x=3.$$

C2 Ответ: $\frac{17}{25}$.

Решение. Обозначим $\angle ASC=\angle BSC=\alpha$. Рассечём пирамиду плоскостью, перпендикулярной ребру SC (см. рис. С2–10).

В сечении получим ΔA_1KB_1; $\angle A_1KB_1=60^\circ$; $B_1K\perp SK$; $A_1K\perp SK$ и $A_1K=B_1K$. Обозначим $SK=x$. Тогда

$$A_1K=B_1K=x\,\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}x.\quad A_1S=SB_1=\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{5}{3}x.$$

Из ΔMKB_1: $MB_1=\frac{1}{2}A_1B_1=B_1K\sin 30^\circ=\frac{2}{3}x.$

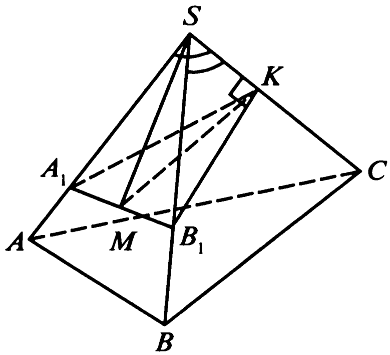

Рис. С2–10.

Обозначим $\angle A_1SB_1 = \beta$. Из ΔMSB_1:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{MB_1}{SB_1} = \frac{2}{5}, \ \cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{17}{25}.$$

$\boxed{\text{C3}}$ Ответ: $x \geqslant 2$.

Решение. Данное неравенство определено на множестве $(0;1)\cup(1;\infty)$. Преобразуем его к виду $\dfrac{\log_x(x^3+1)}{\log_x(x+1)} \geqslant 2$ и рассмотрим следующие случаи:

1) $x > 1$, тогда $\log_x(x+1) > 0$, и неравенство равносильно неравенству вида

$$\log_x(x^3+1) \geqslant 2\log_x(x+1), \ x^3+1 \geqslant (x+1)^2, \ x^2 - 2x \geqslant 0 \text{ и } x \geqslant 2;$$

2) $0 < x < 1$, тогда $\log_x(x+1) < 0$, и неравенство приводится к виду $\dfrac{\log_x(x^3+1)}{\log_x(x+1)} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_x(x^3+1) - 2\log_x(x+1)}{\log_x(x+1)} \geqslant 0$,

$$\log_x(x^3+1) \leqslant 2\log_x(x+1), \ x^3+1 \geqslant (x+1)^2 \text{ и } x \geqslant 2.$$

Это решение противоречит условию $0 < x < 1$. Следовательно, для $x \in (0;1)$ исходное неравенство не имеет решения. Таким образом, решением исходного неравенства является множество $[2;\infty)$.

$\boxed{\text{C4}}$ Ответ: $\dfrac{12\sqrt{3}-9}{50}$.

Решение. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ находится как разность между площадями заданного треугольника и треугольников A_1B_1C, AC_1B_1, C_1BA_1 (см. рис. С4–10):

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AC_1B_1} - S_{\Delta A_1B_1C} - S_{\Delta C_1BA_1}.$$

$$S_{\Delta AC_1B_1} = \frac{1}{2}AC_1 \cdot AB_1 \cdot \sin\angle A.$$

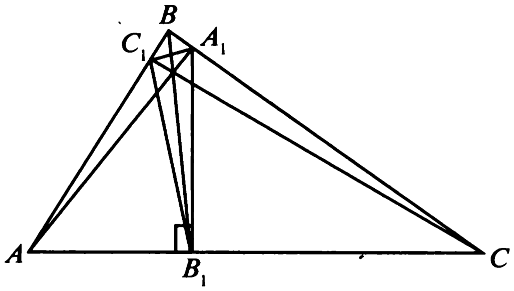

Рис. С4—10.

Из ΔABB_1: $AB_1 = AB \cdot \cos\angle A$; из ΔAC_1C: $AC_1 = AC \cdot \cos\angle A$.

Тогда $S_{\Delta AC_1B_1} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle A \cdot \cos^2\angle A$ или

$$S_{\Delta AC_1B_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos^2\angle A = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}.$$

Аналогично $S_{\Delta A_1BC_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos^2\angle B = \frac{9}{25}S_{\Delta ABC}$ и $S_{\Delta B_1A_1C} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos^2\angle C$.

Находим

$$\cos\angle C = \cos(180^\circ - (\angle A + \angle B)) = -\cos(\angle A + \angle B) =$$

$$= \sin\angle A \cdot \sin\angle B - \cos\angle A \cdot \cos\angle B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{10} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}, \quad S_{\Delta B_1A_1C} = \frac{57 - 24\sqrt{3}}{100}S_{\Delta ABC}.$$

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{9}{25} - \frac{57 - 24\sqrt{3}}{100}\right), \quad \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{12\sqrt{3} - 9}{50}.$$

С5 Ответ: Если $|a| > 4\sqrt{2} + 5$, то система решений не имеет; если $a = \pm(4\sqrt{2} + 5)$, то одно решение; если $a \in (-4\sqrt{2} - 5; -4\sqrt{2} + 5) \cup (4\sqrt{2} - 5; 4\sqrt{2} + 5)$, то два решения; если $a = \pm(4\sqrt{2} - 5)$, то три решения; если $5 - 4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2} - 5$, то четыре решения.

Решение. Применим графический метод решения. Первое уравнение системы определяет окружность на плоскости $0XY$ с центром в начале координат и радиусом 4. Второе уравнение определяет «угол» с вершиной в точке $(-5;a)$ и лучами, направленными вправо от прямой $x=-5$ параллельно осям координат (см. рис. C5–10).

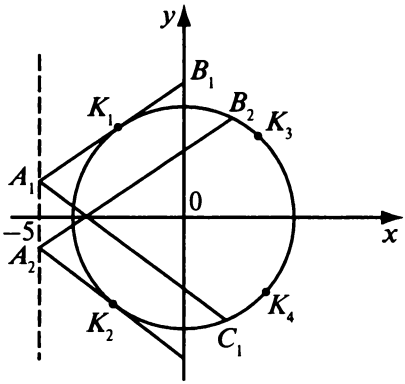

Рис. C5–10.

Вершина «угла» в зависимости от a движется вдоль прямой $x=-5$.

Рассмотрим два положения «угла» , а именно с вершиной A_1, когда верхний луч $y=x+a+5$ касается окружности в точке K_1, и с вершиной A_2, когда нижний луч $y=-x+a-5$ касается окружности в точке K_2. Найдём координаты точек A_1 и A_2.

Так как $K_1\left(-\frac{a+5}{2};\frac{a+5}{2}\right)$, то

$$\sqrt{\frac{(a+5)^2}{4}+\frac{(a+5)^2}{4}}=4,\ (a+5)^2=32 \text{ и } a=-5\pm 4\sqrt{2}.$$

Но для точки A_1 $a>0$. Следовательно, координаты точки A_1: $x=-5;\ y=-5+4\sqrt{2}$.

Точка A_2 симметрична точке A_1, следовательно, её координаты: $x=-5;\ y=5-4\sqrt{2}$.

Очевидно, что если вершина «угла» находится между A_1 и A_2, то каждый луч пересекает окружность в двух точках. Следовательно, если $5-4\sqrt{2}<a<-5+4\sqrt{2}$, система имеет четыре решения.

Если вершина «угла» совпадает либо с A_1, либо с A_2, то один луч касается окружности, а другой пересекает её в двух точках. Следовательно, если $a=4\sqrt{2}-5$ или $a=5-4\sqrt{2}$, система имеет три решения.

Если вершина A_1 поднимается по прямой $x=-5$, то с окружностью будет пересекаться только нижний луч, определяемый уравнением $y=-x+a-5$ до того момента, пока он не коснётся окружности в точке $K_3\left(\frac{a-5}{2};\frac{a-5}{2}\right)$. Так как $\frac{(a-5)^2}{4}+\frac{(a-5)^2}{4}=16$, то $a=5\pm4\sqrt{2}$. Но вершине A_1 соответствует $a>0$. Следовательно, $a=5+4\sqrt{2}$.

Итак, если $4\sqrt{2}-5<a<4\sqrt{2}+5$, то система имеет два решения.

Аналогично рассуждая о движении вершины A_2 вниз или используя симметрию, получим, что при $-4\sqrt{2}-5<a<-4\sqrt{2}+5$ система также имеет два решения.

Если $a=\pm(4\sqrt{2}+5)$, то система имеет одно решение.

Если $|a|>4\sqrt{2}+5$, система решений не имеет.

C6 Ответ: $(0;0),(-1;-1)$. **Указание.** Разложите левую часть уравнения на множители.

Решение. Представим разложение уравнения на множители в виде

$$(x^2+a_1x+b_1y+c_1)(x+b_2y+c_2)=c_1c_2.$$

Перемножив скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и y полученной суммы слагаемых и левой части исходного уравнения, получим систему уравнений для неизвестных коэффициентов a_1,b_1,c_1,b_2,c_2. Выпишем слева степени, а справа равенства коэффициентов при этих степенях:

$$\begin{array}{r|c}
x^2y & b_2=-2, \\
xy & b_1+a_1b_2=2 \\
y^2 & b_1b_2=-4 \\
x^2 & a_1+c_2=1 \\
x & a_1c_2+c_1=2 \\
y & c_1b_2+b_1c_2=-2.
\end{array}$$

Из этой системы следует: $a_1=0,\ b_1=2,\ c_2=1,\ c_1=2,$

Подставив $b_1 = 2,\ b_2 = -2,\ c_1 = 2,\ c_2 = 1$ в последнее уравнение, получим $-2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -2$, т.е. последнее уравнение системы выполняется. Следовательно, разложение на множители имеет вид $(x^2 + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 2$.

Каждый множитель должен принимать целые значения, так как x и y — целые числа.

Рассмотрим следующие варианты:

1) $\begin{cases} x^2 + 2y + 2 = 2, \\ x - 2y + 1 = 1, \end{cases}$ $x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = -1, y_2 = -0{,}5;$

2) $\begin{cases} x^2 + 2y + 2 = 1, \\ x - 2y + 1 = 2, \end{cases}$ $x_1 = -1, y_1 = -1, x_2 = 0, y_2 = -0{,}5;$

3) $\begin{cases} x^2 + 2y + 2 = -2, \\ x - 2y + 1 = -1, \end{cases}$ решения нет;

4) $\begin{cases} x^2 + 2y + 2 = -1, \\ x - 2y + 1 = -2, \end{cases}$ решения нет.

Таким образом, $(0;0)$ и $(-1;-1)$ являются решениями уравнения в целых числах.

Содержание

Вариант 1 5
Вариант 2 13
Вариант 3 22
Вариант 4 32
Вариант 5 41
Вариант 6 50
Вариант 7 59
Вариант 8 68
Вариант 9 77
Вариант 10 87

Тесты для подготовки к ЕГЭ

Нейман Юрий Михайлович
Королёва Татьяна Михайловна
Маркарян Елена Георгиевна

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2011

Контрольные тренировочные материалы с ответами и комментариями

Редактор *М. А. Рачинская*
Художественный редактор *Л. Г. Епифанов*
Корректор *А. А. Сазонова*
Компьютерный набор *Г. В. Богомазовой*

Компьютерная вёрстка выполнена *ООО «Аргус»*

Налоговая льгота —
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Подписано в печать с оригинал-макета 04.10.2010.
Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура Newton. Офсетная печать.
Усл. печ. 6,0. Уч.-изд. л. 5,17. Тираж 30 000 экз. Заказ 503.

Санкт-Петербургский филиал Открытого акционерного общества
«Издательство «Просвещение».
191014, Санкт-Петербург, Литейный пр., 37-39.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ГУП «Типография «Наука».
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия, 12.

Издательство «Просвещение» — лидер рынка учебного книгоиздания предлагает новую серию изданий «Итоговый контроль: ЕГЭ», включающую учебно-справочные и контрольные тренировочные материалы, а также индивидуальные комплекты тренировочных материалов, которые охватывают полный цикл подготовки — от теории до практики. Они помогут всем, кто хочет иметь высокие результаты по ЕГЭ!

Учащиеся!

С помощью предлагаемого комплекта вы сможете в короткое время восстановить и пополнить, а также систематизировать свои знания по предмету, что обеспечит готовность выполнить задания, разные по форме и уровню сложности, а значит, успешно сдать сам экзамен.

Учителя и руководители общеобразовательных учреждений!

Предлагаемый вам комплект материалов для подготовки к ЕГЭ разработан с учетом специфики основных существующих учебных (рабочих) программ и является универсальным инструментом для комплексной индивидуальной и коллективной оценки уровня подготовки учащихся, а также для организации учебно-методической работы в классе как в течение года, так и на завершающем этапе обеспечения успешной сдачи ЕГЭ, включая организацию и практически полную имитацию сдачи экзамена.

Родители!

С помощью данного комплекта вы сможете не только помочь своим детям подготовиться к успешной сдаче ЕГЭ, но и объективно оценить уровень их знаний и степень готовности к ЕГЭ, а также помочь им не растеряться во время экзамена, а значит, полнее проявить свои знания и умения для получения высокого балла.

ЕЩЕНИЕ
ЛЬСТВО

Экзамен с «Просвещением»